دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک رویکرد پارامتری برای حل مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی فازی

سیدهادی ناصری[۱]، ام‌کلثوم خزائی کوه‌پر*[۲]

(۱) دانشکده علوم ریاضی،دانشگاه مازندران، مازندران، بابلسر، ایران.
(۲) دانشکده علوم ریاضی،دانشگاه مازندران، مازندران، بابلسر، ایران (نویسنده مسئول).

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۸/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۱/۱۱

چکیده

در این مقاله یک مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی با متغیرها و بردار منابع فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و الگوریتمی با رویکرد پارامتری جهت حل آن ارائه می‌شود. فرآیند حل پیشنهاد شده برای تعیین جواب بهینه مسأله مبتنی بر رویکرد پارامتری خواهد بود که این امر ضمن انطباق بیشتر جواب با واقعیت، اطلاعات جامع‌تری را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار خواهد داد. سادگی روش مطرح شده یکی از مزیت‌های الگوریتم پیشنهادی است که امکان درک مطلوب‌تر فرآیند حل را توسط کاربر فراهم می‌آورد. همچنین جهت توصیف فرآیند حل روش پیشنهاد شده، یک مثال عددی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی کسری خطی، برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی چندهدفه.[۲]

---

*.عهده‌دارمکاتبات : E-mail: kolsoomkhazaee@yahoo.com

۱- مقدمه

برنامه‌ریزی کسری خطی[۲] (LFP) از جمله موضوعات مورد توجه در برنامه‌ریزی ریاضی است. طیف گسترده‌ای از مسائل دنیای واقعی ما بر پایه نسبت‌های نسبی از مقادیر فیزیکی و یا اقتصادی هستند. در برنامه‌ریزی از نسبت تولید به کارمندان، در حوزه مراقبت‌های بهداشتی و بیمارستان از نسبت هزینه به بیمار و همچنین در برنامه‌ریزی مالی از نسبت بدهی به حقوق مالکین شرکت می‌توان به عنوان مثال‌های کاربردی از این نوع برنامه‌ریزی نام برد.

برای اولین بار ایزبل و مارلو [۴] یک نمونه از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی را شناسایی کردند و آن را با استفاده از دنباله‌ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی حل کردند. بعد از آن یک روش تبدیل متغیر توسط چارنز و کوپر [۵] جهت حل این‌گونه مسائل ارائه شد. گیلمور و گوموری [۶]، مارتوس [۷] و سواراپ [۸]، یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی را با استفاده از روش‌های مختلف بر پایه روش سیمپلکس بهبود یافته – مطرح شده توسط دانتزیک [۹] حل کردند. پس از این که چادها [۱۰] یک روش برای حل مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی با توابع قدر مطلق مقدار پیشنهاد کرد، چان [۱۱] یک رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی فازی را برای حل این‌گونه مسائل مطرح کرد. طنطاوی [۱۲،۱۳] دو رویکرد متفاوت جهت شدنی و رویکرد دوگانی را برای حل این مسائل پیشنهاد کرد. اخیراً نیز مجتبی و همکاران [۱۴]، یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب بازه‌ای را با استفاده از یک تابع هدف بر پایه روش چارنز و کوپر حل کردند.

در مدل‌سازی واقعی یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی همانند سایر مدل‌سازی‌های حقیقی ابهام و یا نادقیق بودن پارامترهای مسأله ناشی از ارزیابی‌های تجربی یا ذهنی متخصصین و سایر عوامل محیطی، امری رایج و گریزناپذیر است. از این‌رو، پارامترهای فازی به عنوان ابزاری واقع‌بینانه در مدل‌سازی این‌گونه مسائل به کار گرفته شد. بلمن و زاده [۱۵] ایده بیشینه کردن تصمیمات را برای مسائل تصمیم‌گیری فازی مطرح کردند. نظریه کلی برنامه‌ریزی خطی فازی نخستین بار توسط تاناکا و همکاران [۱۶] ارائه شد و پس از آن محققین بسیاری روش‌های مختلفی را در این حوزه مطرح کردند. ([۲۰ ,۱۹ ,۱۸ ,۱۷]). پال و همکاران [۲۱] یک روند برنامه‌ریزی آرمانی را برای یک مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی فازی مورد مطالعه قرار دادند. از تلاش‌های اخیر محققین در زمینه برنامه‌ریزی کسری فازی می‌توان به کار چایناداورای و موتوکومار [۲۲] اشاره کرد که یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب و متغیرهای فازی تحت عنوان مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی را مورد مطالعه قرار داده و روشی برای محاسبه یک جواب بهینه (α, r) برای آن ارائه کردند. آنها با استفاده از تبدیل مسأله مورد نظر به یک مسأله برنامه‌ریزی دوهدفه که خود تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی خواهد شد رویکرد خود را مطرح کردند. همچنین ناصری و خزائی کوه‌پر ([۲۳] ,[۱]) ضمن ارائه یک رویکرد بهبود یافته در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی و ضرایب بازه‌ای، کاربرد آن را در مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی با ضرایب فازی به صورت یک الگوریتم یکپارچه مطرح کردند. یکی از کاربردهای برنامه‌ریزی کسری در چارچوب مدل تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی فازی را می‌توان در منبع [۳] ملاحظه کرد.

در این مقاله یک مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی با متغیرها و بردار منابع فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و با یک رویکرد پارامتری، الگوریتمی جهت حل این‌گونه از مسائل ارائه می‌شود که جواب بهینه نهایی را به صورت پارامتری نتیجه خواهد داد.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است:

در بخش دوم، برخی تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز را بیان می‌کنیم. در بخش سوم، برنامه‌ریزی کسری خطی را در محیط‌های قطعی و فازی مورد توجه قرار خواهیم داد. در بخش چهارم، الگوریتم مورد نظر برای حل مسأله ارائه می‌شود. در نهایت یک مثال عددی جهت توصیف فرآیند حل با الگوریتم پیشنهادی در این بخش مطرح خواهد شد.

2. Linear Fractional Programming

۲-تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی تعاریف و مفاهیم اولیه‌ای که مورد نیاز است را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱ [۲۴]: نگاشت $f : \mathbb{R} \rightarrow [0.1]$ را یک عدد فازی گوییم به شرطی که در موارد زیر صدق کند:

- f نیم‌پیوسته بالایی است.
- در نقاط خارج از بازه $[c.d] \subset \mathbb{R}$، داریم: $f(x) = 0$.
- اعداد حقیقی $a . b$ وجود دارند بطوری‌که $c \le a \le b \le d$ و تابع $f(x)$ روی $[c.a] \subset \mathbb{R}$، به طور یکنواخت صعودی و روی $[b.d] \subset \mathbb{R}$، به طور یکنواخت نزولی است. همچنین به ازای هر $x \in [a.b]$، داریم: $f(x) = 1$.

قرارداد ۱: مجموعه همه اعداد فازی (معرفی شده در تعریف ۱) را با $F(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

اکنون تعریف دیگری از یک عدد فازی با دیدگاه پارامتری را معرفی می‌کنیم که در ادبیات فازی، معادل با تعریف ۱ می‌باشد.

تعریف ۲ [۲۵]: یک عدد فازی دلخواه را در شکل پارامتری می‌توان به صورت زوج مرتبی از توابع $\left(\underline{f}(r).\overline{f}(r)\right). 0 \le \text{r} \le 1$ نمایش داد بطوری‌که در شرایط زیر صدق کنند:

- $\underline{f}(r)$ یک تابع کراندار، صعودی یکنواخت و از چپ پیوسته روی $[0.1]$ می‌باشد.
- $\overline{f}(r)$ یک تابع کراندار، نزولی یکنواخت و از چپ پیوسته روی $[0.1]$ می‌باشد.
- $\underline{f}(r) \le \overline{f}(r). 0 \le \text{r} \le 1$.

۲-۱- حساب روی اعداد فازی پارامتری و رابطه ترتیبی بین آنها

براساس تعریف ۲، فرض کنید $\tilde{x} = \left(\underline{x}(r).\overline{x}(r)\right)$ و $\tilde{y} = \left(\underline{y}(r).\overline{y}(r)\right)$ دو عدد فازی در نمایش پارامتری، و k یک اسکالر حقیقی باشد. در این صورت حساب روی این اعداد فازی پارامتری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم ([۲, ۲۵])

i. $\tilde{x} \approx \tilde{y} \Leftrightarrow \underline{x}(r) = \underline{y}(r) .\ \overline{x}(r) = \overline{y}(r)$

ii. $\tilde{x} + \tilde{y} = (\underline{x}(r) + \underline{y}(r) . \overline{x}(r) + \overline{y}(r))$

iii. $\text{k}\tilde{x} = \left(k\, \underline{x}(r). k\overline{x}(r)\right) .\ k \in \mathbb{R},$

iv. $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = (min\left\{\underline{x}\underline{y}. \underline{x}\overline{y}. \overline{x}\, \underline{y}. \overline{x}\, \overline{y}\right\}. max\{\underline{x}\underline{y}. \underline{x}\overline{y}. \overline{x}\, \underline{y}. \bar{x}\ \bar{y}\})$

v. $\tilde{x}/\tilde{y} = (min\left\{\frac{\underline{x}}{\overline{y}}. \frac{\underline{x}}{\underline{y}}. \frac{\overline{x}}{\overline{y}}. \frac{\overline{x}}{\underline{y}}\right\}. max\left\{\frac{\underline{x}}{\overline{y}}. \frac{\underline{x}}{\underline{y}}. \frac{\overline{x}}{\overline{y}}. \frac{\overline{x}}{\underline{y}}\right\}).\quad \tilde{y} \not\approx \tilde{0}$

تذکر ۱. در فضای همه مجموعه‌های فازی در نمایش پارامتری تعریف می‌کنیم: $\tilde{0} = (0.0)$ و $\tilde{1} = (1.1)$.
دو عدد فازی $\tilde{x} = \left(\underline{x}(r).\overline{x}(r)\right)$ و $\tilde{y} = \left(\underline{y}(r).\overline{y}(r)\right)$ را در نظر بگیرید. برای معرفی ترتیب روی این اعداد فازی، با الگوگیری از رویکرد گوتچل و واکسمن [۲۶]، شاخص oh را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$oh(\tilde{x}.\tilde{y}) = \int_0^1 r[(\underline{x}(r) - \underline{y}(r)) + (\overline{x}(r) - \overline{y}(r))]\, dr$$

در این صورت ترتیب زیر را تعریف می‌کنیم:

$\tilde{x} \precsim \tilde{y} \Leftrightarrow oh(\tilde{x}.\tilde{y}) \le 0$

$\tilde{x} \prec \tilde{y} \Leftrightarrow oh(\tilde{x}.\tilde{y}) < 0$

همچنین می‌نویسیم $\tilde{y} \succsim \tilde{x}$ ($\tilde{y} \succ \tilde{x}$) اگر و تنها اگر $\tilde{x} \precsim \tilde{y}$ ($\tilde{x} \prec \tilde{y}$).

حال اگر متر d روی مجموعه همه اعداد فازی پارامتری را به صورت

$$d(\tilde{x}.\tilde{y}) = d(\left(\underline{x}(r).\overline{x}(r)\right).(\underline{y}(r).\overline{y}(r)) = \sup\{max\{\left|\underline{x}(r) - \underline{y}(r)\right|.|\overline{x}(r) - \overline{y}(r)|\}; 0 \le r \le 1\}$$

در نظر بگیریم ([۲۶])، کرانداری روی یک مجموعه از اعداد فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳: یک مجموعه از اعداد فازی را کراندار گوییم هرگاه یک عدد حقیقی M وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر عدد فازی $\tilde{x}$ متعلق به این مجموعه داشته باشیم:

$$d\left(\tilde{x}.\tilde{0}\right) < M$$

۳- برنامه‌ریزی کسری خطی

در این بخش، شکل کلی از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی را معرفی نموده و سپس روش چارنز و کوپر [۵] را که مبتنی بر تبدیل خطی جهت حل این‌گونه مسائل است، ارائه خواهیم کرد. در زیربخش دوم، مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی در دو حالت تک‌هدفه و چندهدفه مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۳-۱- مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی

تعریف ۳ [۵]: یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$max \quad Z(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j + p}{\sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j + q} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

s.t.

$$x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b \,.\, x \ge 0\}, \qquad (۱)$$

که در آن S مجموعه‌ای ناتهی و کراندار است، $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $b \in \mathbb{R}^m$، $c\,.\,d \in \mathbb{R}^n$ و $p\,.\,q \in \mathbb{R}$. اکنون برای برخی از مقادیر x، ممکن است $D(x)$ برابر با صفر شود. از این‌رو جهت جلوگیری از وقوع این شرایط، باید داشته باشیم:

$\{x \ge 0. Ax \le b \Rightarrow D(x) > 0\}$ یا $\{x \ge 0. Ax \le b \Rightarrow D(x) < 0\}$. بدون از دست دادن کلیت برای سهولت، فرض می‌کنیم شرط زیر برای مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی داده شده در (۱) برقرار باشد:

$$x \ge 0. Ax \le b \Rightarrow D(x) > 0. \qquad (۲)$$

تعریف ٤ [۲۷]: دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$max \quad F(x) \qquad \text{و} \qquad max \quad G(x)$$
$$\text{s.t.} \quad x \in S \ \text{(i)} \qquad\qquad \text{s.t.} \quad x \in Q \ \text{(ii)}$$

در این صورت مسائل (i) و (ii) معادل هم هستند اگر و فقط اگر یک نگاشت یک به یک f از مجموعه شدنی مسأله (i) به روی مجموعه شدنی مسأله (ii) وجود داشته باشد بطوری‌که برای همه $x \in S$، داشته باشیم:

$$F(x) = G(f(x)).$$

قضیه ۱ [۵, ۲۸]. فرض کنید که هیچ نقطه $(y.0)$ با $y \ge 0$ برای مسأله برنامه‌ریزی خطی

$$max \quad c^T y + pt$$
$$\text{s.t.} \quad d^T y + qt = 1.$$
$$Ay - bt \le 0. \qquad (۳)$$
$$t \ge 0\,.\; y \ge 0.\; y \in \mathbb{R}^n\,.\, t \in \mathbb{R}$$

شدنی نباشد. در این صورت با فرض برقراری شرط (۲)، مسأله (۱) با مسأله برنامه‌ریزی خطی (۳) معادل است.

اثبات: برای اثبات به منبع [۲۸] رجوع کنید.

اکنون دو مسأله مرتبط زیر را در نظر بگیرید :

$$max \quad tN\left(\frac{y}{t}\right)$$
$$\text{s.t.} \quad A\left(\frac{y}{t}\right) - bt \le 0\;.$$
$$tD\left(\frac{y}{t}\right) = 1\,.$$
$$t > 0\,.\, y \ge 0\,. \qquad (۴)$$

و

$$max \quad tN\left(\frac{y}{t}\right)$$
$$\text{s.t.} \quad A\left(\frac{y}{t}\right) - bt \le 0\;.$$
$$tD\left(\frac{y}{t}\right) \le 1\,.$$
$$t > 0\,.\, y \ge 0\,. \qquad (۵)$$

که در آن مسأله (۴) با استفاده از تبدیل $t = \frac{1}{D(x)}$ و $y = tx$ در (۱) بدست آمده و مسأله (۵) از جای‌گذاری محدودیت تساوی $tD\left(\frac{y}{t}\right) = 1$ با محدودیت نامساوی $tD\left(\frac{y}{t}\right) \le 1$ در (۴) بدست آمده است.

قضیه ۲ [۲۹]. برای برخی $\eta \in S$ ،$N(\eta) \ge 0$، اگر مسأله (۱) در $x = x^*$ به مقدار بیشینه (مطلق) برسد، آنگاه مسأله (۳) در یک نقطه $(t.y) = (t^*.y^*)$ به مقدار بیشینه (مطلق) می‌رسد که در آن $\frac{y^*}{t^*} = x^*$ و مقدار توابع هدف در این نقاط با هم برابر است.

تعریف ۵ [۲۷]: مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی (۱) را با شرط (۲) در نظر بگیرید. مسأله (۱) یک برنامه‌ریزی کسری مقعر – محدب استاندارد است، هرگاه $N(.)$ روی S مقعر بوده و به ازای برخی از مقادیر $x \in S$، داشته باشیم $N(x) \ge 0$ و همچنین $D(.)$ روی S مثبت و محدب باشد.

قضیه ۳ [۲۹, ۳۰]. اگر مسأله (۱) یک برنامه‌ریزی کسری مقعر – محدب استاندارد باشد که در یک نقطه x^* به مقدار بیشینه (مطلق) برسد، آنگاه مسأله تبدیل یافته مرتبط (۵)، همان مقدار بیشینه را در یک نقطه

$(t^*.y^*)$ بدست می‌آورد، که در آن $x^* = y^*/t^*$. علاوه بر این، مسأله (۵) یک تابع هدف مقعر و یک مجموعه شدنی محدب دارد.

در مسأله (۱) فرض کنید $N(x)$ برای هر $x \in S$، مقعر و منفی و $D(x)$ روی S مقعر و مثبت است. در این صورت داریم:

$$\max_{x\in S}\frac{N(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \min_{x\in S}\frac{-N(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \max_{x\in S}\frac{D(x)}{-N(x)}$$

که در آن $-N(x)$، محدب و مثبت است. بنابراین، مسأله (۱) به یک مسأله برنامه‌ریزی کسری استاندارد مقعر – محدب تبدیل شده است. از این‌رو با استفاده از قضیه ۱، مسأله (۱) به مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\max\ \ tD\left(\frac{y}{t}\right)\\&\text{s.t.}\quad A\left(\frac{y}{t}\right) - bt \le 0\ . \qquad -tN\left(\frac{y}{t}\right) \le 1\\&t.y \ge 0\ .\end{aligned}$$

در بخش بعد یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی در دو حالت تک‌هدفه و چندهدفه معرفی می‌شود. سپس یک الگوریتم برای حل این‌گونه مسائل تشریح می‌شود.

۳-۲- مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی

در این بخش ابتدا یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی تک‌هدفه در محیط فازی معرفی می‌شود و سپس برنامه‌ریزی کسری خطی را در حالت چندهدفه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳-۲-۱- مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی تک‌هدفه

تعریف ٦ [۲۸]: یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی در حالت تک‌هدفه را که در آن متغیرها و بردار منابع فازی هستند، با FLFP [3] نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\max \qquad \tilde{Z}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{N}(\tilde{x})}{\tilde{D}(\tilde{x})} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j\,\tilde{x}_j + p}{\sum_{j=1}^{n} d_j\,\tilde{x}_j + q}\\&\text{s.t.} \qquad \tilde{x} \in \tilde{S} \qquad\qquad (۶)\end{aligned}$$

بطوری‌که $c\,.\,d \in \mathbb{R}^n$ و $p\,.\,q \in \mathbb{R}$. همچنین $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $\tilde{b} \in (\mathrm{F}(\mathbb{R}))^m$. $\tilde{S} = \{\tilde{x} \in (\mathrm{F}(\mathbb{R}))^n : A\,\tilde{x} \precsim \tilde{b}.\ \tilde{x} \succsim \tilde{0}\}$

با استدلالی مشابه حالت قطعی شرط زیر را برای مدل (۶) در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{x} \succsim \tilde{0}. A\,\tilde{x} \precsim \tilde{b} \Rightarrow \tilde{D}(\tilde{x}) \succ \tilde{0} \qquad (۷)$$

لم ۱[۳۱]. برای اعداد فازی $\tilde{x}$، $\tilde{y}$ و $\tilde{z}$ روابط زیر را داریم:

i. $\tilde{x}(\tilde{y} + \tilde{z}) \approx \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{z}$

ii. $\tilde{x}(\tilde{y} - \tilde{z}) \approx \tilde{x}\tilde{y} - \tilde{x}\tilde{z}$

دو قضیه زیر نشان می‌دهند که قضایای ۱ و ۲ در حالتی که متغیرها و بردار منابع مسأله فازی هستند نیز برقرار است.

قضیه ٤. فرض کنید که هیچ نقطه $(\tilde{y}.\tilde{0})$ با $\tilde{y} \succsim \tilde{0}$ برای مسأله برنامه‌ریزی خطی فازی

$$\begin{aligned}&\max\quad c^T\tilde{y} + p\tilde{t}\\&\text{s.t.}\quad d^T\tilde{y} + \tilde{t}q \approx \tilde{1}\\&A\tilde{y} - \tilde{b}\tilde{t} \precsim \tilde{0} \qquad\qquad (۸)\\&\quad \tilde{t} \succsim \tilde{0}\,.\ \ \tilde{y} \succsim \tilde{0}.\ \ \tilde{y} \in (\mathrm{F}(\mathbb{R}))^n\,.\,\tilde{t} \in \mathrm{F}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

شدنی نباشد. در این صورت با فرض برقراری شرط (۷)، مسأله FLFP (۶) با مسأله برنامه‌ریزی خطی فازی (۸) معادل است.

اثبات: برای $\tilde{x}$ شدنی از مسأله (۶)، تعریف می‌کنیم $q(\tilde{x}) = (\tilde{y}.\tilde{t})$ به طوری‌که $\tilde{t} \approx \tilde{1}/_{(d^T\tilde{x} + q)}$ و $\tilde{y} \approx \tilde{t}\tilde{x}$. در نتیجه $\tilde{y} \succsim \tilde{0}.\tilde{t} \succ \tilde{0}$. همچنین با استفاده از لم ۱، داریم:

$$A\tilde{y} - \tilde{b}\tilde{t} \approx \tilde{t}(A\tilde{x} - \tilde{b}) \precsim \tilde{0}$$

و

$$d^T\tilde{y} + \tilde{t}q \approx \tilde{t}(d^T\tilde{x} + q) \approx \tilde{1}$$

بنابراین $(\tilde{y}.\tilde{t})$ برای مسأله (۸) شدنی است. بعکس اگر $(\tilde{y}.\tilde{t})$ برای مسأله (۸) شدنی باشد و هیچ نقطه $(\tilde{y}.\tilde{0})$ی برای (۸) شدنی نباشد، آنگاه $\tilde{t} \succ \tilde{0}$. $\tilde{x} \approx \frac{\tilde{y}}{\tilde{t}}$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\tilde{x} \succsim \tilde{0}.\ A\tilde{x} - \tilde{b} \approx \frac{A\tilde{y} - \tilde{b}\tilde{t}}{\tilde{t}} \approx \tilde{0}$$

3. Fuzzy Linear Fractional Programming

در نتیجه $q(.)$ مجموعه جواب شدنی مدل (۶) را به صورت یک به یک به روی مجموعه جواب شدنی مدل (۸) می‌نگارد. بعلاوه تابع هدف مرتبط به صورت زیر است:

$$\frac{c^T\tilde{x}+p}{d^T\tilde{x}+q}\approx\frac{c^T\tilde{y}+p\tilde{t}}{d^T\tilde{y}+q\tilde{t}}\approx\frac{c^T\tilde{y}+p\tilde{t}}{\tilde{1}}\approx c^T\tilde{y}+p\tilde{t}$$

در نتیجه معادل بودن مورد نظر نتیجه می‌شود.

قضیه ۵. برای برخی مقادیر $\tilde{N}(\tilde{\eta})\gtrsim\tilde{0}.\tilde{\eta}\in\tilde{S}$، اگر مسأله (۶) در $\tilde{x}=\tilde{x}^*$ به مقدار بیشینه (مطلق) برسد، آنگاه مسأله (۸) در یک نقطه $(\tilde{y}.\tilde{t})=(\tilde{y}^*.\tilde{t}^*)$ به مقدار بیشینه (مطلق) می‌رسد که در آن $\tilde{x}^*\approx\frac{\tilde{y}^*}{\tilde{t}^*}$ و مقدار توابع هدف در این نقاط با هم برابر است.

اثبات: با تعمیم اثبات قضیه ۳ و با استفاده از روابط حساب فازی نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

۳-۲-۲- مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی فازی

تعریف ۷ [۲۸]: یک مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی فازی را که در آن متغیرها و بردار منابع فازی هستند، با FMOLFP [4] نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&max \quad \{\tilde{Z}_1(\tilde{x}).\tilde{Z}_2(\tilde{x}).\dots.\tilde{Z}_k(\tilde{x})\}\\&\text{s.t.} \quad \tilde{x}\in\tilde{S}\end{aligned}\qquad (۹)$$

بطوری‌که برای هر $l\in\{1.\dots.k\}$ داریم: $\tilde{Z}_l(\tilde{x})=\frac{\tilde{N}_l(\tilde{x})}{\tilde{D}_l(\tilde{x})}=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{lj}\tilde{x}_j+p_l}{\sum_{j=1}^{n}d_{lj}\tilde{x}_j+q_l}$، $c_l.d_l\in\mathbb{R}^n$ و $p_l.q_l\in\mathbb{R}$. همچنین

$\tilde{S}=\{\tilde{x}\in(\mathrm{F}(\mathbb{R}))^n: A\tilde{x}\precsim\tilde{b}.\ \tilde{x}\succsim\tilde{0}\}$، $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$، $\tilde{b}\in(\mathrm{F}(\mathbb{R}))^m$.

دو مجموعه اندیس زیر را در نظر بگیرید:

$L=\{l\,|\tilde{N}_l(\tilde{x})\succsim\tilde{0}.\text{ for some }\tilde{x}\in\tilde{S}\}$,
$L^c=\{l\,|\tilde{N}_l(\tilde{x})\prec\tilde{0}.\text{ for each }\tilde{x}\in\tilde{S}\}$,

بطوری‌که $L\cup L^c=\{1.\dots.k\}$.

فرض کنید به ازای هر l، $\tilde{D}_l(\cdot)$ روی $\tilde{S}$ که مجموعه‌ای ناتهی و کراندار است، مثبت باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{t}$ حداقل مقدار $\frac{\tilde{1}}{d_l\tilde{x}+q_l}$ و $\frac{-\tilde{1}}{c_l\tilde{x}+p_l}$ به ترتیب برای $l\in L$ و $l\in L^c$ باشد. در این صورت برای $l\in L$ داریم: $\tilde{t}\precsim\frac{\tilde{1}}{d_l\tilde{x}+q_l}$ و برای $l\in L^c$ خواهیم داشت: $\tilde{t}\precsim\frac{-\tilde{1}}{c_l\tilde{x}+p_l}$.

برای $\tilde{t}\succ\tilde{0}$، قرار دهید: $\tilde{y}\approx\tilde{t}\,\tilde{x}$. اکنون با استفاده از قضایای ۴، ۵ و نامساوی‌های یاد شده، می‌توان یک مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی معادل را برای مسأله (۹) به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}&max \quad \{\tilde{t}\tilde{N}_l\left(\tfrac{\tilde{y}}{\tilde{t}}\right).\text{ for }l\in L\,;\ \tilde{t}\tilde{D}_l\left(\tfrac{\tilde{y}}{\tilde{t}}\right).\text{ for }l\in L^c\}\\&\text{s.t.} \quad \tilde{t}\tilde{D}_l\left(\tfrac{\tilde{y}}{\tilde{t}}\right)\precsim\tilde{1}.\ \text{for }l\in L\,.\\&-\tilde{t}\tilde{N}_l\left(\tfrac{\tilde{y}}{\tilde{t}}\right)\precsim\tilde{1}.\ \text{for }l\in L^c\\&\mathrm{A}\left(\tfrac{\tilde{y}}{\tilde{t}}\right)-\tilde{b}\tilde{t}\precsim\tilde{0}\ .\\&\tilde{y}\succsim\tilde{0}\,.\ \tilde{t}\succsim\tilde{0}\end{aligned}\qquad (۱۰)$$

مشابه استدلالی که در [۲۸] برای مدل قطعی نشان داده شده است و همچنین با استفاده از خواص مجموعه‌های فازی، مجموعه محدودیت‌های مسأله (۱۰) نیز همواره مجموعه‌ای ناتهی محدب است که دارای جواب شدنی می‌باشد (جهت مشاهده جزئیات بیشتر در رابطه با خواص مجموعه‌های فازی محدب و برنامه‌ریزی محدب فازی، منابع [۳۲] و [۳۳] پیشنهاد می‌گردد).

صورت پارامتری مسأله (۱۰) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}&max \quad \{(\underline{t}.\overline{t})\tilde{N}_l\left(\tfrac{(\underline{y}.\overline{y})}{(\underline{t}.\overline{t})}\right).\text{ for }l\in L\,;\\&(\underline{t}.\overline{t})\tilde{D}_l\left(\tfrac{(\underline{y}.\overline{y})}{(\underline{t}.\overline{t})}\right).\text{ for }l\in L^c\}\\&\text{s.t.} \quad (\underline{t}.\overline{t})\tilde{D}_l\left(\tfrac{(\underline{y}.\overline{y})}{(\underline{t}.\overline{t})}\right)\precsim\tilde{1}.\ \text{for }l\in L\ .\\&-(\underline{t}.\overline{t})\tilde{N}_l\left(\tfrac{(\underline{y}.\overline{y})}{(\underline{t}.\overline{t})}\right)\precsim\tilde{1}.\ \text{for }l\in L^c\ .\\&\mathrm{A}\left(\tfrac{(\underline{y}.\overline{y})}{(\underline{t}.\overline{t})}\right)-\left(\underline{b}(r).\overline{b}(r)\right)(\underline{t}.\overline{t})\precsim\tilde{0}\ .\\&\underline{y}.\ \overline{y}\geq 0\,.\ \underline{t}\,.\overline{t}\geq 0.\\&0\leq \mathrm{r}\leq 1\end{aligned}\qquad (۱۱)$$

4. Fuzzy Multi-Objective Linear Fractional Programming

٤- الگوریتم حل

در این بخش با توجه به مقدمات بیان شده در بخش‌های قبل، یک الگوریتم با رویکرد برنامه‌ریزی پارامتری جهت حل مسأله (۹) ارائه می‌کنیم.

گام اول: مسأله پارامتری معادل با مسأله (۹) را به صورت مدل (۱۱) در نظر بگیرید. در مدل (۱۱)، مقادیر $r = 0$ و $r = 1$ را جهت یافتن مسائل کمکی اعمال کنید. برای این منظور به گام بعدی بروید.

گام دوم: در مسأله (۱۱)، قرار دهید $r = 0$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
max \quad & \{\left(\underline{t}^0.\overline{t}^0\right)\widetilde{N}_l\left(\frac{\left(\underline{y}^0.\overline{y}^0\right)}{\left(\underline{t}^0.\overline{t}^0\right)}\right).\ \text{for}\ l \in L\ ;\\
& \left(\underline{t}^0.\overline{t}^0\right)\widetilde{D}_l\left(\frac{\left(\underline{y}^0.\overline{y}^0\right)}{\left(\underline{t}^0.\overline{t}^0\right)}\right).\ \text{for}\ l \in L^c\}\\
\text{s.t.} \quad & (\underline{t}^0.\overline{t}^0)\widetilde{D}_l\left(\frac{\left(\underline{y}^0.\overline{y}^0\right)}{\left(\underline{t}^0.\overline{t}^0\right)}\right) \le 1.\ \text{for}\ l \in L\ .\\
& -(\underline{t}^0.\overline{t}^0)\widetilde{N}_l\left(\frac{\left(\underline{y}^0.\overline{y}^0\right)}{\left(\underline{t}^0.\overline{t}^0\right)}\right) \le 1.\ \text{for}\ l \in L^c\ .\\
& \mathrm{A}\left(\frac{(\underline{y}^0.\overline{y}^0)}{(\underline{t}^0.\overline{t}^0)}\right) - \left(\underline{b}(0).\overline{b}(0)\right)(\underline{t}^0.\overline{t}^0) \le 0\ .\\
& \underline{y}^0.\ \overline{y}^0 \ge 0\ .\ \underline{t}^0\ .\ \overline{t}^0 \ge 0 \qquad (۱۲)
\end{aligned}$$

گام سوم: با توجه به ماهیت متغیرهای $\tilde{y}$ و $\tilde{t}$، دو زیرمسأله چندهدفه قطعی زیر را جهت حل مدل (۱۲) تشکیل دهید:

$$\begin{aligned}
max \quad & \{\overline{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right).\ \text{for}\ l \in L\ ;\\
& \overline{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right).\ \text{for}\ l \in L^c\}\\
\text{s.t.} \quad & \overline{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) \le 1.\ \text{for}\ l \in L\ .\\
& -\overline{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) \le 1.\ \text{for}\ l \in L^c\ .\\
& \mathrm{A}\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) - \underline{b}(0)\overline{t}^0 \le 0\ .\\
& \underline{y}^0.\overline{t}^0 \ge 0\ . \qquad (۱۳)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
max \quad & \{\underline{t}^0 N_l\left(\frac{\overline{y}^0}{\underline{t}^0}\right),\ \text{for}\ l \in L\ ;\\
& \underline{t}^0 D_l\left(\frac{\overline{y}^0}{\underline{t}^0}\right).\ \text{for}\ l \in L^c\}\\
\text{s.t.} \quad & \underline{t}^0 D_l\left(\frac{\overline{y}^0}{\underline{t}^0}\right) \le 1.\ \text{for}\ l \in L\ .\\
& -\underline{t}^0 N_l\left(\frac{\overline{y}^0}{\underline{t}^0}\right) \le 1.\ \text{for}\ l \in L^c\ .\\
& \mathrm{A}\left(\frac{\overline{y}^0}{\underline{t}^0}\right) - \overline{b}(0)\underline{t}^0 \le 0\ .\\
& \overline{y}^0.\underline{t}^0 \ge 0\ . \qquad (۱۴)
\end{aligned}$$

با حل جداگانه مسائل (۱۳) و (۱۴) توسط عملگر min زیمرمن [۳۴]، به ترتیب به جواب‌های $\{\underline{y_1}^0.\underline{y_2}^0.\dots.\underline{y_n}^0.\overline{t}^0\}$ و $\{\overline{y_1}^0.\overline{y_2}^0.\dots.\overline{y_n}^0.\underline{t}^0\}$ متناظر با $r = 0$ می‌رسیم.

تذکر ۲: جهت بکارگیری عملگر min زیمرمن، ابتدا برای هر یک از توابع هدف مسأله مورد نظر یک تابع عضویت معرفی می‌کنیم. در اینجا روند حل با استفاده از روش مذکور را برای مدل (۱۳) بیان می‌کنیم. به طریق مشابه این روند قابل تعمیم برای مدل‌های (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) خواهد بود:

ابتدا تابع عضویت را برای هریک از توابع هدف مدل (۱۳)، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای $l \in L$:

$$\mu_l\left(\overline{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \overline{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) \le 0\\ \dfrac{\overline{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) - 0}{\overline{Z_l^0} - 0} & 0 < \overline{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) < \overline{Z_l^0}\\ 1 & \overline{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) \ge \overline{Z_l^0} \end{cases}$$

و برای $l \in L^c$:

$$\mu_l\left(\overline{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \overline{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) \le 0\\ \dfrac{\overline{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) - 0}{\overline{Z_l^0} - 0} & 0 < \overline{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) < \overline{Z_l^0}\\ 1 & \overline{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\overline{t}^0}\right) \ge \overline{Z_l^0} \end{cases}$$

که در آن ماکسیمم سطح آرمانی $\overline{Z_l^0}$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

هر یک از توابع هدف مدل (۱۳) را با توجه به محدودیت‌های مسأله ماکسیمم‌سازی کنید. فرض کنید به ازای $l = 1.2.\dots.k$، Z_l^{0*} ماکسیمم مقدار l امین تابع هدف مدل (۱۳) باشد.

اگر $l \in L$، آنگاه قرار دهید: $\overline{Z_l^0} = Z_l^{0*}$ و اگر $l \in L^c$، آنگاه قرار دهید: $\overline{Z_l^0} = -\frac{1}{Z_l^{0*}}$.

اکنون با توجه به توابع عضویت معرفی شده در بالا و همچنین با استفاده از عملگر min [۳۴]، مدل زیر را خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
& max \quad \lambda \\
& \text{s.t.} \quad \lambda \le \mu_l\left(\bar{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\bar{t}^0}\right)\right) \ ; \ l \in L \\
& \lambda \le \mu_l\left(\bar{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\bar{t}^0}\right)\right) \ ; \ l \in L^c \\
& \bar{t}^0 D_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\bar{t}^0}\right) \le 1 \ ; \ l \in L \\
& -\bar{t}^0 N_l\left(\frac{\underline{y}^0}{\bar{t}^0}\right) \le 1 \ ; \ l \in L^c \\
& \mathrm{A}\left(\frac{\underline{y}^0}{\bar{t}^0}\right) - \underline{b}(0)\bar{t}^0 \le 0 \\
& \underline{y}^0.\bar{t}^0 \ge 0
\end{aligned}
$$

با حل مدل اخیر به جواب بهینه مطلوب‌خواهیم رسید.

گام چهارم: در مسأله (۱۱)، قرار دهید $r = 1$. در این صورت خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
& max \quad \{\left(\underline{t}^1.\bar{t}^1\right)\tilde{N}_l\left(\frac{\left(\underline{y}^1.\bar{y}^1\right)}{\left(\underline{t}^1.\bar{t}^1\right)}\right). \text{for } l \in L \ ; \\
& \left(\underline{t}^1.\bar{t}^1\right)\tilde{D}_l\left(\frac{\left(\underline{y}^1.\bar{y}^1\right)}{\left(\underline{t}^1.\bar{t}^1\right)}\right). \text{for } l \in L^c\} \\
& \text{s.t.} \quad (\underline{t}^1.\bar{t}^1)\tilde{D}_l\left(\frac{\left(\underline{y}^1.\bar{y}^1\right)}{\left(\underline{t}^1.\bar{t}^1\right)}\right) \le 1. \ \text{for } l \in L \ . \\
& -(\underline{t}^1.\bar{t}^1)\tilde{N}_l\left(\frac{\left(\underline{y}^1.\bar{y}^1\right)}{\left(\underline{t}^1.\bar{t}^1\right)}\right) \le 1. \ \text{for } l \in L^c \ . \\
& \mathrm{A}\left(\frac{\left(\underline{y}^1.\bar{y}^1\right)}{\left(\underline{t}^1.\bar{t}^1\right)}\right) - \left(\underline{b}(1).\bar{b}(1)\right)(\underline{t}^1.\bar{t}^1) \le 0 \ . \\
& \underline{y}^1.\ \bar{y}^1 \ge 0\ .\ \underline{t}^1\ .\ \bar{t}^1 \ge 0\ . \qquad (۱۵)
\end{aligned}
$$

گام پنجم: دو زیرمسأله چندهدفه قطعی زیر را جهت حل مدل (۱۵) تشکیل دهید:

$$
\begin{aligned}
& max \quad \{\bar{t}^1\tilde{N}_l\left(\frac{\underline{y}^1}{\bar{t}^1}\right). \text{for } l \in L \ ; \\
& \bar{t}^1\tilde{D}_l\left(\frac{\underline{y}^1}{\bar{t}^1}\right). \text{for } l \in L^c\} \\
& \text{s.t.} \quad \bar{t}^1\tilde{D}_l\left(\frac{\underline{y}^1}{\bar{t}^1}\right) \le 1. \ \text{for } l \in L \ . \\
& -\bar{t}^1\tilde{N}_l\left(\frac{\underline{y}^1}{\bar{t}^1}\right) \le 1. \ \text{for } l \in L^c \ . \\
& \mathrm{A}\left(\frac{\underline{y}^1}{\bar{t}^1}\right) - \underline{b}(1)\,\bar{t}^1 \le 0 \ . \\
& \underline{y}^1.\ \bar{t}^1 \ge 0 \qquad (۱۶)
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
& max \quad \{\underline{t}^1\tilde{N}_l\left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1}\right). \text{for } l \in L \ ; \\
& \underline{t}^1\tilde{D}_l\left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1}\right). \text{for } l \in L^c\} \\
& \text{s.t.} \quad \underline{t}^1\tilde{D}_l\left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1}\right) \le 1. \ \text{for } l \in L \ . \\
& -\underline{t}^1\tilde{N}_l\left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1}\right) \le 1. \ \text{for } l \in L^c \ . \\
& \mathrm{A}\left(\frac{\bar{y}^1}{\underline{t}^1}\right) - \bar{b}(1)\underline{t}^1 \le 0 \ . \\
& \bar{y}^1.\underline{t}^1 \ge 0\ . \qquad (۱۷)
\end{aligned}
$$

ا حل جداگانه مسائل (۱۶) و (۱۷) توسط عملگر min زیمرمن [۳۴]، به ترتیب به جواب‌های $\{\underline{y_1}^1.\underline{y_2}^1.\dots.\underline{y_n}^1.\ \bar{t}^1\}$ و $\{\overline{y_1}^1.\overline{y_2}^1.\dots.\overline{y_n}^1.\underline{t}^1\}$، متناظر با $r = 1$ می‌رسیم.

گام ششم: با استفاده از جواب‌های بدست آمده در گام‌های سوم و پنجم، قرار دهید:

$$
\begin{aligned}
\underline{y}_j^* &= \left(\underline{y}_j^{\,1} - \underline{y}_j^{\,0}\right)\mathrm{r} + \underline{y}_j^{\,0}. \\
\bar{y}_j^* &= \left(\bar{y}_j^{\,1} - \bar{y}_j^{\,0}\right)\mathrm{r} + \bar{y}_j^{\,0}. \\
\underline{t}^* &= \left(\underline{t}^1 - \underline{t}^0\right)\mathrm{r} + \underline{t}^0. \\
\bar{t}^* &= \left(\bar{t}^1 - \bar{t}^0\right)\mathrm{r} + \bar{t}^0.
\end{aligned}
$$

و در نتیجه $\tilde{y}_j^* = (\underline{y}_j^*.\bar{y}_j^*)$, $\tilde{t}^* = (\underline{t}^*.\bar{t}^*)$ یک جواب برای مسأله (۱۱) خواهد بود.

گام هفتم: با توجه به تبدیل $\tilde{x} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{t}}$، به جواب مسأله اصلی می‌رسیم:

$$
\tilde{x}_j^* = \left(\frac{\underline{y}_j^*}{\bar{t}^*}.\frac{\bar{y}_j^*}{\underline{t}^*}\right)
$$

و در نهایت با جای‌گذاری مقادیر $\tilde{x}_j^*$ در (۶)، مقادیر هر یک از توابع هدف $\tilde{Z}_l(\tilde{x}^*).\ l = 1.\dots.k$ بدست خواهد آمد.

نکته ۱: شایان ذکر است که در الگوریتم یاد شده، جهت سادگی در گام‌های‌ های سوم و پنجم، روش زیمرمن [۳۴] را برای حل مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی قطعی

استفاده کرده‌ایم، در حالی که این انتخاب هیچ‌گونه محدودیتی را در فرآیند حل ایجاد نمی‌کند و هر روش دیگری که جواب را بدست دهد، می‌تواند جهت حل این‌گونه مسائل در مراحل یاد شده به کار گرفته شود.

نکته ۲: توجه به این نکته حائز اهمیت است که در الگوریتم پیشنهادی همواره فرض بر این بوده که مجموعه اندیس‌های L و L^c و یا به عبارتی ماهیت $\tilde{N}_l(\tilde{x})$ به ازای $l = 1. \dots . k$ معلوم می‌باشد. در صورتی که آنها بطور صریح معین نباشند، اما بدانیم که مخرج توابع هدف در فضای جواب مثبت است، در این صورت جهت یافتن مجموعه اندیس‌های L و L^c این‌گونه عمل می‌کنیم:

۱) هر یک از توابع هدف $\tilde{Z}_l(\tilde{x})$ را با توجه به محدودیت‌ها و صورت پارامتری مسأله، با بکارگیری روش چارنز و کوپر [۵] بیشینه سازی نمایید. به ازای هر $l = 1. \dots . k$ ، $\tilde{Z}_l^*$ را به عنوان مقدار بیشینه $\tilde{Z}_l(\tilde{x})$ در نظر بگیرید.

۲) اگر $\tilde{Z}_l^* \gtrsim \tilde{0}$ باشد، آنگاه $l \in L$ و اگر $\tilde{Z}_l^* \prec \tilde{0}$ ، آنگاه $l \in L^c$.

۵- مثال عددی

در این بخش به منظور تشریح فرآیند حل مدل پیشنهادی به ارائه یک مثال عددی می‌پردازیم که در آن یک مسأله FMOLFP که به صورت مدل (۹) تعریف شده است، با الگوریتم ارائه شده در این مقاله حل خواهد شد. همچنین جهت بررسی اعتبار روش، جواب را در حالت قطعی با جواب بدست آمده از روش چاکرابورتی [۲۸] مقایسه می‌کنیم.

مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی فازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
&max \quad \{\tilde{Z}_1(\tilde{x}) . \tilde{Z}_2(\tilde{x}) . \tilde{Z}_3(\tilde{x})\} \\
&= (\tfrac{\tilde{x}_1+\tilde{x}_2}{2\tilde{x}_1+\tilde{x}_2+1} . \tfrac{4\tilde{x}_1+3\tilde{x}_2}{6\tilde{x}_1+2\tilde{x}_2+1} . \tfrac{2\tilde{x}_1+4\tilde{x}_2+1}{\tilde{x}_1+2\tilde{x}_2+3}) \\
&\text{s.t.} \quad 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \gtrsim (r. 2-r). \\
&\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 \lesssim (18 + r. 20 - r). \\
&2\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 \gtrsim (10 + r. 14 - 3r). \\
&\tilde{x}_1 \gtrsim (4 + r. 7 - 2r). \\
&\tilde{x}_1 . \tilde{x}_2 \gtrsim \tilde{0} \;.0 \le r \le 1 \qquad (۱۸)
\end{aligned}$$

مسأله پارامتری معادل با مسأله (۱۸) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&max \quad \{(\underline{y_1}.\overline{y_1}) + (\underline{y_2}.\overline{y_2}) . 4(\underline{y_1}.\overline{y_1}) \\
&+3(\underline{y_2}.\overline{y_2}) . 2(\underline{y_1}.\overline{y_1}) + 4(\underline{y_2}.\overline{y_2}) + (\underline{t}.\overline{t})\} \\
&\text{s.t.} \quad 2(\underline{y_1}.\overline{y_1}) + (\underline{y_2}.\overline{y_2}) + (\underline{t}.\overline{t}) \le 1. \\
&6(\underline{y_1}.\overline{y_1}) + 2(\underline{y_2}.\overline{y_2}) + (\underline{t}.\overline{t}) \le 1. \\
&(\underline{y_1}.\overline{y_1}) + 2(\underline{y_2}.\overline{y_2}) + 3(\underline{t}.\overline{t}) \le 1. \\
&2(\underline{y_1}.\overline{y_1}) - (\underline{y_2}.\overline{y_2}) \\
&-(r. 2-r)(\underline{t}.\overline{t}) \ge 0 \;. \\
&(\underline{y_1}.\overline{y_1}) + 4(\underline{y_2}.\overline{y_2}) \\
&-(18 + r. 20 - r)(\underline{t}.\overline{t}) \le 0 \;. \\
&2(\underline{y_1}.\overline{y_1}) + 4(\underline{y_2}.\overline{y_2}) - (10 + r. 14 \\
&-3r)(\underline{t}.\overline{t}) \ge 0 \;. \\
&(\underline{y_1}.\overline{y_1}) - (4 + r. 7 - 2r)(\underline{t}.\overline{t}) \ge 0 \;. \\
&\underline{y_1}.\overline{y_1}.\underline{y_2}.\overline{y_2} \ge 0 \;.\underline{t}.\overline{t} \ge 0. \; 0 \le r \le 1 \\
&(۱۹)
\end{aligned}$$

حال با توجه به گام دوم و سوم در الگوریتم مطرح شده در این بخش و با قرار دادن $r = 0$ نتایج زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\underline{y_1}^0 = 0.125. \; \overline{y_1}^0 = 0.1414141. \\
&\underline{y_2}^0 = 0.1093750. \; \overline{y_2}^0 = 0.06565657. \\
&\underline{t}^0 = 0.02020202. \; \overline{t}^0 = 0.03125 \,.
\end{aligned}$$

همچنین با بکارگیری گام چهارم و پنجم نتایج زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&\underline{y_1}^1 = 0.1315789. \; \overline{y_1}^1 = 0.1315789. \\
&\underline{y_2}^1 = 0.09210526. \; \overline{y_2}^1 = 0.09210526. \\
&\underline{t}^1 = 0.02631579. \; \overline{t}^1 = 0.02631579 \,.
\end{aligned}$$

با اعمال گام ششم داریم:

$$\begin{aligned}
&\underline{y_1}^* = 0.0065789\text{r} + 0.125. \\
&\overline{y_1}^* = -0.0098352r + 0.1414141. \\
&\underline{y_2}^* = -0.01726974\text{r} + 0.1093750. \\
&\overline{y_2}^* = 0.02644869r + 0.06565657. \\
&\underline{t}^* = 0.00611377\text{r} + 0.02020202. \\
&\overline{t}^* = -0.00493421r + 0.03125. \\
&\tilde{x}_1^* = (\underline{x_1}^*. \overline{x_1}^*) = \left(\frac{\underline{y_1}^*}{\overline{t}^*}. \frac{\overline{y_1}^*}{\underline{t}^*}\right)
\end{aligned}$$

اکنون از رابطه $\tilde{x} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{t}}$، جواب مسأله اصلی به صورت زیر است:

$$= \left(\frac{0.0065789r + 0.125}{-0.00493421r + 0.03125} . \frac{-0.0098352r+0.1414141}{0.00611377r+0.02020202}\right).$$

$$\tilde{x}_2^{\,*} = \left(\underline{x_2}^{*}.\overline{x_2}^{*}\right) = \left(\frac{\underline{y_2}^{*}}{\overline{t}^{*}}.\frac{\overline{y_2}^{*}}{\underline{t}^{*}}\right)$$

$$= \left(\frac{0.02644869r + 0.06565657}{-0.00493421r + 0.03125} . \frac{-0.01726974r+0.1093750}{0.00611377r+0.02020202}\right).$$

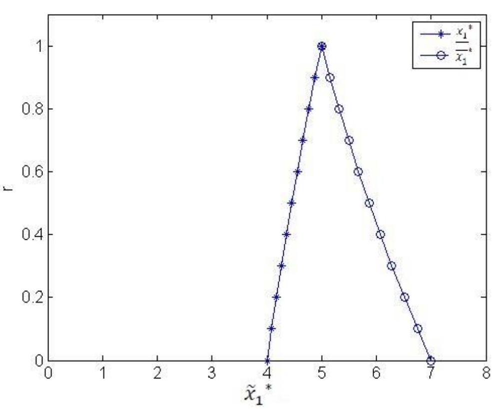
که با جای‌گذاری مقادیر $\tilde{x}_1^{\,*}$ و $\tilde{x}_2^{\,*}$ در (۱۶)، مقادیر توابع هدف به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\tilde{Z}_1^{\,*}(\tilde{x}^*) = \left(\frac{0.03304r + 0.19066}{-0.00493421r + 0.03125} \times \frac{0.00611377r + 0.02020202}{-0.03078r + 0.4124} . \frac{-0.0271r + 0.2508}{0.00611377r + 0.02020202} \times \frac{-0.00493421r + 0.03125}{0.03471r + 0.34691}\right).$$

$$\tilde{Z}_2^{\,*}(\tilde{x}^*) = \left(\frac{0.10572r + 0.697}{-0.00493421r + 0.03125} \times \frac{0.00611377r + 0.02020202}{-0.08728r + 1.0874} . \frac{-0.0911r + 0.8938}{0.00611377r + 0.02020202} \times \frac{-0.00493421r + 0.03125}{0.08755r + 0.91257}\right).$$

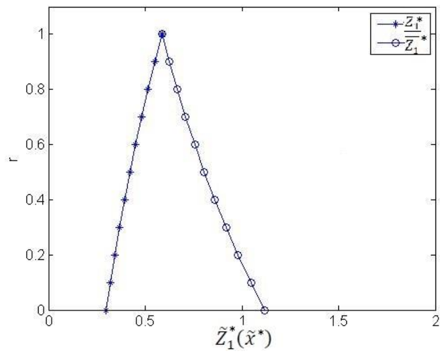
$$\tilde{Z}_3^{\,*}(\tilde{x}^*) = \left(\frac{0.11403r + 0.51264}{-0.00493421r + 0.03125} \times \frac{0.00611377r + 0.02020202}{-0.02604r + 0.4208} . \frac{-0.08268r + 0.7204}{0.00611377r + 0.02020202} \times \frac{-0.00493421r + 0.03125}{0.04469r + 0.35007}\right).$$

نتایج بدست آمده را می‌توان در شکل‌های زیر مشاهده کرد.

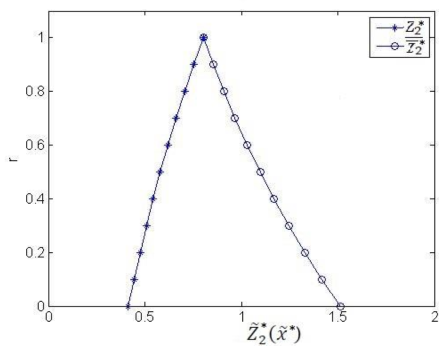


شکل۱- مقدار بهینه متغیر تصمیم اول

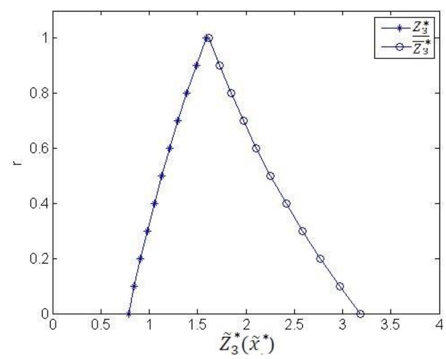
شکل۲- مقدار بهینه متغیر تصمیم دوم



شکل۳- مقدار بهینه تابع هدف اول



شکل٤- مقدار بهینه تابع هدف دوم



شکل۵- مقدار بهینه تابع هدف سوم

اکنون جهت بررسی اعتبار روش، جواب بدست آمده در مثال مطرح شده را در حالت قطعی (با قرار دادن $r = 1$) با روش مطرح شده توسط چاکرابورتی [۲۸] مقایسه می‌کنیم.

مسأله (۱۸) را در حالت قطعی زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&max \quad \{Z_1(x)\,.\,Z_2(x)\,.\,Z_3(x)\} \\
&= (\tfrac{x_1+x_2}{2x_1+x_2+1}\,.\,\tfrac{4x_1+3x_2}{6x_1+2x_2+1}\,.\,\tfrac{2x_1+4x_2+1}{x_1+2x_2+3}) \\
&\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \geq 1\ . \\
&x_1 + 4x_2 \leq 19\ . \\
&2x_1 + 4x_2 \geq 11\ . \\
&x_1 \geq 5\ . \\
&x_1\,.\,x_2 \geq 0
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

طبق روش چاکرابورتی، مسأله معادل با (۲۰)، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&max \quad \{y_1 + y_2\,.\,4y_1 + 3y_2\,.\,2y_1 + 4y_2 + t\} \\
&\text{s.t.} \quad 2y_1 + y_2 + t \leq 1 \\
&6y_1 + 2y_2 + t \leq 1 \\
&y_1 + 2y_2 + 3t \leq 1 \\
&2y_1 - y_2 - t \geq 0\,. \\
&y_1 + 4y_2 - 19t \leq 0\,. \\
&2y_1 + 4y_2 - 11t \geq 0\,.
\end{aligned}$$

$y_1 - 5t \geq 0\ .$
$y_1\ .\ y_2 \geq 0\ .\ t \geq 0.$

پس از اعمال مدل مطرح شده توسط چاکرابورتی، به مدل زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
&max \quad \lambda \\
&\text{s.t.} \quad \lambda \leq \frac{1}{0.5862069}(y_1 + y_2) \\
&\lambda \leq \frac{1}{0.8026316}(4y_1 + 3y_2) \\
&\lambda \leq \frac{1}{1.772727}(2y_1 + 4y_2 + t) \\
&2y_1 + y_2 + t \leq 1 \\
&6y_1 + 2y_2 + t \leq 1 \\
&y_1 + 2y_2 + 3t \leq 1 \\
&2y_1 - y_2 - t \geq 0\ . \\
&y_1 + 4y_2 - 19t \leq 0\ . \\
&2y_1 + 4y_2 - 11t \geq 0\ . \\
&y_1 - 5t \geq 0\ . \\
&y_1\ .\ y_2 \geq 0\ .\ t \geq 0. \qquad (۲۱)
\end{aligned}$$

جواب حاصل از حل مدل (۲۱)، به صورت زیر می‌باشد:

$\lambda^* = 0.3711202$
$y_1^* = 0.1315789$
$y_2^* = 0.09210526$
$t^* = 0.02631579$

و در نتیجه

$x_1^* = 4.9999981. \quad x_2^* = 3.49999981.$
$Z_1(x^*) = 0.5862. \quad Z_2(x^*) = 0.8026.$
$Z_3(x^*) = 1.6667$

که مطابق با جواب بدست آمده از روش مطرح شده در این مقاله در حالت قطعی (به ازای $r = 1$) می‌باشد.

٦- نتیجه‌گیری

همان‌طور که در مقاله اشاره شد، برنامه‌ریزی کسری خطی یکی از مباحث کاربردی را در مسأله برنامه‌ریزی ریاضی مورد توجه قرار می‌دهد. در این مقاله یک مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی با متغیرها و بردار منابع فازی مورد مطالعه قرار گرفت و الگوریتمی با رویکرد پارامتری جهت حل آن ارائه شد. با توجه به فرآیند حل تشریح شده، ملاحظه شد از جمله مزیت‌های روش این است که با اعمال این الگوریتم، جواب بهینه مسأله به صورت پارامتری خواهد بود که این امر ضمن اعتبار و انطباق بیشتر جواب با واقعیت، اطلاعات جامع‌تری را در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار خواهد داد. سادگی روش مطرح شده از مزیت‌های دیگر الگوریتم پیشنهادی است که امکان درک مطلوب‌تر فرآیند حل را توسط کاربر فراهم می‌آورد. همچنین یک مثال عددی جهت درک بهتر رویکرد ارائه شده و کاربرد روش، ارائه شد تا توصیف عددی مناسبی از فرآیند حل را روشن نماید. همچنین با توجه به تحقیقات اندکی که در راستای حل این‌گونه مسائل انجام شده است، توسعه مدل مطرح شده در این مقاله و بکارگیری آن در مسائل دنیای واقعی جهت ارائه یک مطالعه تطبیقی مؤثر در این حوزه جهت پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود.

فهرست منابع

[۱] خزائی کوه‌پر ا (۱۳۹۶). بهبود روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با پارامترهای مشکک، پایان‌نامه دکتری، دانشگاه مازندران، بابلسر.

[۲] ناصری س.ه، عطاری ح. (۱۳۹۴). برنامه‌ریزی خطی فازی، انتشارات دانشگاه مازندران، بابلسر.

۳) ناصری س ه، غلامی ا، ابراهیم‌نژاد ع، فلاح جلودار م (۱۳۹۵). یک رویکرد جدید مبتنی بر آلفا برش‌ها برای حل مدل تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی فازی.

[4] Isbell J.R., Marlow W.H (1956). Attrition games. Naval Research Logistics Quarterly.

[5] Charnes A, Cooper W.W (1962). Programming with linear fractional functions. Naval Research Logistics Quarterly.

[6] Gilmore P.C, Gomory R.E (1963). Linear programming approach to the cutting stock problem: Part 2. Operations Research.

[7] Martos B (1964). Hyperbolic programming. Naval Research Logistics Quarterly.

[8] Swarup K (1965). Linear fractional functional programming. Operations Research.

[9] Dantzig G.B (1962). Linear Programming and Extension. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[10] Chadha S.S (2002). Fractional programming with absolute-value function. European Journal of Operations Research.

[11] Chan C.-T (2005). Fractional programming with absolute-value functions: a fuzzy goal programming approach. Applied Mathematics and Computation.

[12] Tantawy S.F (2008). A new procedure for solving linear fractional programming problems. Mathematical and Computer Modelling.

[13] Tantawy S.F (2007). Using feasible directions to solve linear fractional programming problems. Australian Journal of Basic and Applied Sciences.

[14] Mojtaba B, Azmin S, Mansour S (2012). Solving linear fractional programming problems with interval coefficients in the objective function: A new approach. Applied Mathematical Sciences.

[15] Bellman R.E, Zadeh L.A (1970). Decision making in a fuzzy environment. Management Science.

[16] Tanaka H, Okuda T, Asai K (1973). On fuzzy mathematical programming. Journal of Cybernetics and Systems.

[17] Baky, I.A (2010). Solving multi-level multi-objective linear programming problems through fuzzy goal programming approach. Applied Mathematical Modeling.

[18] Dutta D, Rao J.R, Tiwari R.N (1993). Effect of tolerance in fuzzy linear fractional programming. Fuzzy Sets and Systems.

[19] Li D.F, Chen S (1996). A fuzzy programming approach to fuzzy linear fractional programming with fuzzy coefficients. Journal of Fuzzy Mathematics.

[20] Nasseri S.H, Khazaee Kohpar O (2015). Pareto-optimal solutions in

multi-objective linear programming with fuzzy numbers. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics.

[21] Pal B.B, Moitra B.N, Maulik U (2003). A goal programming procedure for fuzzy multiobjective linear fractional programming problem. Fuzzy Sets and Systems.

[22] Chinnadurai V, Muthukumar S (2016). Solving the linear fractional programming problem in a fuzzy environment: Numerical approach. Applied Mathematical Modelling.

[23] Nasseri S.H, Khazaee Kohpar O (2017). An improved approach for solving interval number and fuzzy number LP problems with its application in fuzzy multi-objective linear fractional programming. submitted.

[24] Klir G.J, Clair V.S, Yuan B (1997). Fuzzy set theory: foundation and application. Printice-Hall Inc.

[25] Ma M, Friedman M, Kandel A (1999). A new fuzzy arithmetic. Fuzzy Sets and Systems.

[26] Goetschel R, Voxman W (1986). Elementary fuzzy calculus. Fuzzy Sets and Systems.

[27] Craven B.D (1988). Fractional Programming. Heldermann Verlag, Berlin.

[28] Chakraborty M, Gupta S (2002). Fuzzy mathematical programming for multi objective linear fractional programming problem. Fuzzy Sets and Systems.

[29] Schaible S (1976). Fractional programming 1:duality. Management Science.

[30] Schaible S (1978). Analyse and Anwendungen Von Quotienten Programmen. Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan.

[31] Ganesan K, Veeramani P (2006). Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers. Annals of Operations Research.

[32] Cao B-Y (2010). Optimal Models and Methods with Fuzzy Quantities. Springer- Verlag Berline Heidelberg.

[33] Lodwick W.A, Kacprzyk J (2010). Fuzzy Optimization: Recent advances and applications. Springer- Verlag Berline Heidelberg.

[34] Zimmermann J (1976). Description and optimization of fuzzy systems. International Journal of General Systems.