دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

JNRM
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی ارتباط بین وجود بردارهای پذیرفتنی با میانگین‌پذیری و فشردگی یک گروه موضعاً فشرده

جوادسعادتمندان[۱]، دکتر علیرضا باقری ثالث[۲]*

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران.
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران (نویسنده مسئول).

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۹/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۱/۲۳

چکیده:
وجود بردارهای پذیرفتنی برای یک گروه موضعاً فشرده، با خواص آن گروه، کاملاً در ارتباط است. در گروه‌های فشرده طبق قضیه پیتر ویل هر نمایش تحویل‌ناپذیر دارای بردار پذیرفتنی است. در این مقاله، شرایطی که طبق آنها عکس این قضیه برقرار باشد مورد برررسی قرار گرفته است. شرایطی نظیر وجود نمایش‌هایی که هم بردار پذیرفتنی و هم بردار پایا دارند، فشردگی گروه مربوطه را نتیجه می‌دهند. همچنین SIN- گروه‌هایی که دارای نمایش تحویل‌ناپذیر با بردار پذیرفتنی هستند فشرده هستند. مطالعه‌ی این قسمت ازآنالیز هارمونیک مارا به بررسی خواص جبرهای راژمن، AR گروه‌ها، SIN گروه‌ها می‌رساند. با توجه به این‌که با داشتن بردار پذیرفتنی، یک ایزومتری از فضای هیلبرت نمایش در $L^2(G)$ ایجاد می‌شود و این امر ایجاب می‌کند که به نمایش مربوطه به عنوان زیر نمایشی از λ_G نگاه شود بررسی خواص زیر نمایش‌های λ_G از پیامدهای وجود بردار پذیرفتنی برای نمایش مورد مطالعه می‌باشد. یکی از مسائل مهم در آنالیز هارمونیک نوشتن نمایش منظم چپ به صورت مجموع مسقیم از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر است. ما در این مقاله این مسأله مهم را با وجود بردار پذیرفتنی تلفیق و از آن برای خاصیت فشردگی گروه استفاده نموده‌ایم. طبق مرجع (۱) که به بررسی میانگین‌پذیری نمایش‌ها پرداخته است، خاصیت شمول ضعیف نمایش‌ها در λ_G مطرح می‌شود لذا در مرحله اول وجود بردار پذیرفتنی برای نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، میانگین‌پذیری را نتیجه می‌دهد. فشردگی گروه، خاصیت قوی‌تری نسبت به میانگین‌پذیری آن است. در این مقاله ضمن اثبات این که فشردگی نیز شرط لازم برای فرض فوق است، شرط ضعیف‌تری نیز بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: گروه موضعاً فشرده، بردار پذیرفتنی، خاصیت (T)، نمایش سری‌های گسسته.

---

* عهده‌دارمکاتبات

* Email:aliraza_bagheri_salec@yahoo.com

۱– مقدمه

یک نمایش یکانی π برای یک گروه موضعا فشرده G یک هومومورفیسم گروهی بین گروه مذکور و گروه عملگرهای یکانی یک فضای هیلبرت H_π می‌باشد. با استفاده از اثر عملگرهای تولید شده روی فضای هیلبرت H_π و بردارهای فضا می‌توان توابع خاصی را که تحت توپولوژی G و توپولوژی عملگری ضعیف روی $U(H_\pi)$، پیوسته و کراندار هستند یعنی به $C_b(G)$ تعلق دارند، بوجود آورد. از بین بردارهای فضای هیلبرت مربوط به عملگرها، بردارهای خاصی وجود دارند که به کمک آنها می‌توان نشاننده‌های ایزومتری از فضای هیلبرت نمایش یعنی H_π، در $L^2(G)$ بوجود آورد. این امر باعث می‌شود که نمایش یکانی π را بتوان به عنوان زیر نمایش از نمایش منظم چپ یعنی λ_G در نظر گرفت. در این صورت برداری از H_π که موجب این ایزومتری شده است را بردار پذیرفتنی یا موجک می‌نامیم. البته در بعضی متون برای نمایش‌های تحویل‌ناپذیر صرفاً عضویت توابع ضریب در $L^2(G)$ مطرح است که در این صورت اصطلاح مربع انتگرال‌پذیری را برای نمایش π به کار می برند و در این صورت برداری که عملگر ضریب را می‌سازد پذیرفتنی نامیده می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد برای نمایش‌های تحویل‌ناپذیر مربع انتگرال‌پذیر، دارای بردار پذیرفتنی می‌باشند. وجود بردار پذیرفتنی یعنی این که π زیر نمایش λ_G باشد. این مطلب مهم از خواصی است که در آنالیز هارمونیک به آن توجه ویژه‌ای می‌شود. برای نمونه اگر تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، زیر نمایشی از λ_G باشند به عبارتی تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، بردار پذیرفتنی داشته باشند آنگاه گروه G میانگین‌پذیر خواهد بود. از طرفی طبق قضیه پیتر ویل در گروه‌های فشرده تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر زیر نمایشی از نمایش منظم چپ می‌باشند، بنابراین در گروه‌های فشرده تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر دارای بردار پذیرفتنی هستند. انگیزه اصلی این مقاله یافتن شرایطی است که تحت آنها عکس این مطلب به نوعی درست باشد. یعنی وجود بردار پذیرفتنی برای نمایش یا نمایش‌هایی، فشردگی را نتیجه دهد. یک نمونه که در این مقاله به آن اشاره شده است، وجود نمایشی است که دارای بردار پذیرفتنی باشد که پایا نیز هست. در این صورت گروه، فشرده خواهد بود. شاکله مقاله بر آن ریخته شده است که زیر نمایش های λ_G چه ویژگی‌هایی از گروه را برای ما مشخص می‌کنند که به کمک آنها بتوانیم به فشردگی نزدیک شویم. برای مثال SIN– گروه‌هایی که دارای نمایش سری گسسته هستند (نمایش تحویل‌ناپذیری که دارای بردار پذیرفتنی است) فشرده‌اند. در بخش اول تعاریف و پیش‌نیازها مطرح شده است. در بخش دوم نتایج اصلی مقاله آورده شده است.

مرجع (۱) خواص تبدیل موجک و ارتباط آن با آنالیز هارمونیک که اساس آن، بررسی نمایش‌های گروه موضعاً فشرده است به نحو خوبی روشن نموده است. در بخش‌هایی از مقاله که مستقیم یا غیرمستقیم با خاصیت $\pi < \lambda_G$ در ارتباط است از مراجع دیگر استفاده شده است.

۲– تعاریف و پیشنیازها

تعریف ۱–۱: گروه G همراه توپولوژی روی آن که عمل گروه و وارون در آن پیوسته باشد را گروه توپولوژی می‌نامیم. اگر G همراه توپولوژی مذکور فضایی موضعاً فشرده باشد، گروه را موضعاً فشرده می‌نامیم.

تعریف ۱–۲: برای گروه‌های موضعاً فشرده اندازه رادُنی که نسبت به انتقال چپ پایا است و در حد یک ضریب حقیقی مثبت یکتا است وجود دارد که به آن اندازه هار چپ گفته می‌شود. در واقع اگر μ اندازه مذکور باشد داریم،

$$\int_G^{\mathbb{R}} f(x)d\mu(xy) = \int_G^{\mathbb{R}} f(xy^{-1})d\mu(x) = \int_G^{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)$$

تعریف ۱–۳: تابع پیمانه‌ای Δ، هومومورفیسم گروهی پیوسته از G در $\mathbb{R}^+$ (گروه اعداد حقیقی مثبت با عمل ضرب) می‌باشد به طوری‌که در رابطه انتگرالی زیر صدق کند.

$$\Delta(y)\int_G^{\mathbb{R}} f(xy)dx=\int_G^{\mathbb{R}} f(x)dx$$

در این رابطه f عضو $C_c(G)$ یعنی توابع مختلط مقدار با محمل فشرده است.

تعریف ۱-٤: هرگاه Δ متحداً برابر با یک باشد، گروه G را گروه یکه پیمانه‌ای[2] می‌نامیم. گروه‌های گسسته، آبلی و فشرده یکه پیمانه‌ای هستند. مثالی از یک گروه موضعاً فشرده که یکه پیمانه‌ای نیست گروه آفینی است که برای بررسی جزئیات تعریف و خواص این گروه به مرجع (۱) صفحه ۳۰ می‌توان مراجعه نمود.

تعریف ۱-۵: یک نمایش یکانی گروه موضعاً فشرده G هومومورفیسم گروهی پیوسته π از G در گروه عملگرهای یکانی یک فضای هیلبرت H_π است. که دارای خاصیت زیر باشد:

$$\pi(g^{-1})=\pi(g)^{-1}=\pi(g)^*$$

پیوستگی مذکور در تعریف، نسبت به توپولوژی G و توپولوژی عملگری ضعیف روی $\mathcal{U}(H_\pi)$ است.

زیر فضای بسته V را تحت π پایا می‌نامیم هرگاه برای هر x در G داشته باشیم: $\pi(x)V\subset V$.

اگر تنها زیر فضاهای پایا $\{0\}$ و H_π باشند، π را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم.

تعریف ۱-٦: فرض کنید ξ و η بردارهایی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. توابع به صورت $\varphi_{\xi.\eta}^{\pi}(.)=\langle \xi\,.\,\pi(.)\eta\rangle$ را توابع ضریب متناظر با π می‌نامیم. با توجه به پیوستگی نمایش، توابع ضریب پیوسته و کراندار می‌باشند. می‌گوییم نمایش π در بی‌نهایت صفر می شود هرگاه برای هر ξ ،η، داشته باشیم: $\varphi_{\xi.\eta}^{\pi}\in C_0(G)$.

تذکر۱-۷. نمایش منظم چپ روی گروه موضعاً فشرده‌ی G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall f\in L^2(G)\ :\ \lambda_G(x)f(y)=f(x^{-1}y)$$

برای نمایش منظم چپ، تابع ضریب به صورت زیراست،

$$\langle\, g\,.\,\lambda_G(x)f\rangle=g*f^*(x)$$

که در آن داریم، $f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}$.

دلیل این تساوی این است که،

$$\langle\, g\,.\,\lambda_G(x)f\rangle=\int_G^{\mathbb{R}} g(y)\,\overline{f(x^{-1}y)}dy$$

y را به xy تبدیل و از پایایی اندازه هار استفاده می‌کنیم، لذا داریم،

$$\int_G^{\mathbb{R}} g(y)\,\overline{f(y^{-1}x)^{-1}}dy$$
$$=\int_G^{\mathbb{R}} g(y)\,f^*(y^{-1}x)dy=g*f^*(x)$$

تعریف: برای بردار η در فضای هیلبرت H_π، عملگر V_η را از H_π در $C_b(G)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_\eta\xi\,(x)=\ \langle\xi\,.\,\pi(x)\eta\rangle$$

برای این عملگر داریم،

$$V_\eta\pi(x)\xi=\lambda_G(x)V_\eta\xi$$

یعنی V_η به فضای جابه جاگرهای π و λ_G تعلق دارد. بنابراین برای نمایش منظم چپ عملگر فوق به صورت زیر خواهد بود،

$$V_f g=g*f^*$$

تذکر ۱-۸. طبق مرجع (۲) تعریف تابع φ ازنوع مثبت[3] است اگر نمایش یکانی π و بردار η در فضای هیلبرت نمایش موجود باشد به طوری‌که:

$$\varphi(\mathrm{x})=\langle\eta\,.\,\pi(x)\eta\rangle$$

تعریف ۱-۹: اگر ρ و π نمایش‌های یکانی از گروه موضعاً فشرده G باشند، می‌گوییم ρ به طور ضعیف مشمول[4] درπ است هرگاه هرتابع از نوع مثبت مربوط به ρ با جمع متناهی از توابع از نوع مثبت مربوط به π تقریب زده شود. دراین‌صورت از نماد $\rho\prec\pi$ استفاده می‌کنیم. باید خاطر نشان شود از توپولوژی همگرایی روی مجموعه‌های فشرده در تقریب مذکور استفاده می‌شود.

تعریف ۱-۱۰: می‌گوییم نمایش ρ به طور قوی مشمول در π است و از نماد $\rho<\pi$ استفاده می‌کنیم،

[2] unimodular
[3] Function of positive type
[4] Weakly contained

هرگاه ρ با زیر نمایشی از π هم‌ارز یکانی باشد. در حقیقت عملگر یکانی و وارون‌پذیر $U: H_\rho \to H_\pi$ موجود باشد به طوری‌که روی زیر فضای بسته از فضای هیلبرت که π به آن تحدید شده است خاصیت جابه‌جایی زیر را داشته باشیم:

$$\forall x \in G \quad : U\rho(x) = \pi(x)U$$

در واقع زیر فضای پایایی مانند K از H_π وجود دارد که تحدید نمایش π به آن زیر نمایشی از π است و ρ با این زیر نمایش هم‌ارز یکانی است.

تذکر ۱-۱۱. به راحتی می‌توان نشان داد که شمول قوی همواره شمول ضعیف را نتیجه می‌دهد. در صورتی‌که بر عکس این مطلب همیشه درست نیست. طبق تعاریف فوق و قضیه‌ی 1.2.1 از مرجع (۳)، گروه G دارای خاصیت (T) است هرگاه برای نمایش یکانی π، $1_G < \pi$ و $1_G \prec \pi$ معادل باشند.

تذکر ۱-۱۲. طبق قضیه $G.3.2$ از مرجع (۳) شرط لازم و کافی برای میانگین‌پذیری گروه G این است که $1_G \prec \lambda_G$. بنابراین گروهی که میانگین‌پذیر بوده و خاصیت (T) داشته باشد فشرده است.

تعریف ۱-۱۳: بردار η از فضای هیلبرت نمایش را پایا می‌نامیم هرگاه برای هر x در G داشته باشیم،

$$\pi(x)\eta = \eta$$

تعریف ۱-۱٤: فرض کنید نمایش π تحویل‌ناپذیر باشد، این نمایش را مربع انتگرال‌پذیر می‌نامیم هرگاه بردارهای ξ و η موجود باشند به طوری‌که

$$V_\eta \xi \in L^2(G).$$

تعریف ۱-۱۵: بردار η را بردار موجک یا بردار پذیرفتنی می‌نامیم هرگاه عملگر V_η یک ایزومتری از H_π در $L^2(G)$ ایجاد نماید به عبارتی ضرب داخلی حفظ شود که نتیجه زیر را خواهیم داشت،

$$\langle V_\eta \xi_1 . V_\eta \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 . \xi_2 \rangle$$

اگر تعریف ضرب داخلی در $L^2(G)$ نوشته شود تساوی زیر حاصل خواهد شد که یک انتگرال بردار مقدار به ما خواهد داد، که می‌توان از آن تعبیر فرمول بازسازی شبیه فرمول بازسازی برای قاب‌ها را داشت،

$$\xi_1 = \int_G^{\mathbb{R}} \langle \xi_1 . \pi(x)\eta \rangle \pi(x)\eta dx$$

تذکر ۱-۱٦. می‌توان نشان داد شرط لازم و کافی برای تحویل‌ناپذیری π این است که برای هر بردار غیر صفر ξ و η داشته باشیم، $V_\eta \xi \neq 0$.

فرض کنید ξ بردار غیر صفری از فضا باشد، به طوری‌که،

$$V_\eta \xi = 0$$

زیر فضای زیر را در نظر بگیریدکه به راحتی می‌توان نشان داد تحت π پایا است،

$$W_\xi = \{\pi(x)\xi \quad : \quad x \epsilon G\}$$

برای هر $y \epsilon G$، طبق داریم،

$$V_\eta \pi(x)\xi(y) = \lambda_G(x) V_\eta \xi(y) = 0$$

بنابراین π نمی‌تواند تحویل‌ناپذیر باشد. برعکس تحویل‌ناپذیری π نتیجه می‌دهد W_ξ با تعریف فوق وجود ندارد.

تعریف ۱-۱۷: نمایش تحویل‌ناپذیری که دارای بردار پذیرفتنی باشد را نمایش سری‌های گسسته[5] می‌نامیم.

تعریف ۱-۱۸: گروه G را یک AR گروه می‌نامیم، هرگاه نمایش منظم چپ آن جمع مستقیمی از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر باشد. طبق قضیه پیتر ویل هر گروه فشرده یک AR گروه است. همچنین گروه $ax + b$ یک AR گروه است. هر AR گروه دارای نمایش سری‌های گسسته است.

تعریف ۱-۱۹: فرض کنید G گروه موضعا فشرده باشد، جبر راژمن مرتبط با G که با $B_\circ(G)$ نشان داده می‌شود متشکل است از اعضای جبر فوریه اشتیلیس که در بی‌نهایت صفر می‌شوند به عبارت دیگر $B_\circ(G) = B(G) \cap C_\circ(G)$.

از تساوی فوق جهت شناسایی فشردگی و میانگین‌پذیری گروه استفاده می‌شود. از آنجائی‌که در این مقاله به بررسی شرایطی برای میانگین‌پذیری و فشردگی گروه پرداخته شده است. پس جبرهای راژمن بی ارتباط با وجود بردارهای پذیرفتنی نیستند.

[5] Discrete series representation

تعریف ۱-۲۰: یک گروه موضعا فشرده را SIN گروه می‌نامیم هرگاه هر همسایگی عنصر یکانی، شامل یک همسایگی مزدوج پایا باشد.

تذکر: گروه‌های فشرده، آبلی و گسسته، SIN گروه هستند. همچنین هر SIN گروه یک گروه یکه پیمانه‌ای است. فرض کنید U یک همسایگی مزدوج پایا از عنصر همانی و μ اندازه هار تعریف شده روی گروه باشد. در این صورت داریم،

$$\mu(Ux) = \mu(x^{-1}Ux) = \mu(U)$$

یعنی اندازه هار پایای راست است.

قضیه زیر معروف به قضیه پیتر - ویل در خصوص گروه‌های فشرده مطرح است که برای جزئیات مربوط به آن می‌توان از مرجع (۳) قضیه $A.5.2$ استفاده نمود.

قضیه (پیترویل[۶]): فرض کنید گروه G فشرده باشد. آنگاه

الف) هر نمایش تحویل‌ناپذیر از G متناهی است.

ب) نماش منظم چپ جمع مستقیمی از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر است.

از تلفیق گزاره $A.5.1$ از مرجع (۳) و گزاره 1.21 از مرجع (۴)، گزاره زیر را در خصوص گروه فشرده داریم:

گزاره ۱-۲۱. احکام زیر معادل هم هستند:

الف) گروه G فشرده است.

ب) $1_G < \lambda_G$

ج) اندازه هار روی G متناهی است.

۳- نتایج و قضایا

در این بخش با توجه به تعاریفی که در بخش قبل ارائه شد، قضایا و نتایج حاصله مطرح می‌شود. از مرجع (۱) برای برخی قضایا و گزاره‌ها استفاده شده است.

قضیه زیر، می‌باشد. باتوجه به تعریف بردار پذیرفتنی، فضای هیلبرت H_π به صورت ایزومتری در فضای هیلبرت $L^2(G)$ می‌نشیند و با توجه به جابه‌جایی

$$V_\eta\pi(x)\xi(y) = \lambda_G(x)V_\eta\xi(y)$$

یعنی،

$$V_\eta\pi(x) = \lambda_G(x)V_\eta.$$

نمایش یکانی π، عملا با زیر نمایشی از نمایش منظم چپ هم‌ارز یکانی است. در قضیه زیر که بر گرفته از قضیه 1.35 مرجع (۱) است از این مطلب استفاده شده است.

قضیه ۲-۱. فرض کنید π نمایش تحویل‌ناپذیر گروه G باشد.

الف) شرط لازم و کافی برای این که π دارای بردارهای پذیرفتنی باشد این است که $\pi < \lambda_G$. به عبارتی π زیر نمایشی از نمایش منظم چپ است. در این صورت π را نمایش سری‌های گسسته می‌نامیم.

ب) عملگر به طور چگال تعریف شده، وارون‌پذیر با وارون به طور چگال تعریف شده و یکتا و مثبت C_π روی H_π موجود است به طوری‌که شرط لازم و کافی برای این که η برداری پذیرفتنی برای π باشد این است که:

$$\eta \in dom(C_\pi) \ . \ \|C_\pi\eta\| = 1$$

همچنین برای بردارهای پذیرفتنی η و η' و بردارهای ξ و ξ' داریم:

$$\langle C_\pi\eta \, . \, C_\pi\eta'\rangle\langle\xi \, . \, \xi'\rangle = \langle V_\eta\xi \, . \, V_{\eta'}\xi'\rangle$$

گزاره ۲-۲. فرض کنید G گروهی فشرده باشد. آنگاه هر نمایش تحویل‌ناپذیر آن دارای بردار پذیرفتنی است.

برهان. طبق قضیه پیتر ویل هر نمایش تحویل‌ناپذیر زیر نمایشی از نمایش منظم چپ است و طبق قضیه ۱ دارای بردار پذیرفتنی است.

قضیه زیر که در مراجع (۴) و (۳) قابل حصول است یک نوع شناسایی از گروه‌های میانگین‌پذیر می‌دهد که با موضوع بردارهای پذیرفتنی که در قضیه فوق مطرح شد در ارتباط است:

قضیه ۲-۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده است. گزاره‌های زیر معادل هم هستند:

الف) G میانگین‌پذیر است.

ب) هرنمایش یکانی تحویل‌ناپذیر به طور ضعیف مشمول در λ_G است.

ج) نمایش بدیهی G روی $\mathbb{C}$ نمایشی که هر عنصر را به عملگر یکانی روی $\mathbb{C}$ می برد) به طور ضعیف مشمول در λ_G است.

د) λ_G میانگین‌پذیر است.

برای تعریف میانگین‌پذیری یک نمایش گروه موضعاً فشرده می‌توان از مرجع (۴) و (۵) استفاده نمود.

گزاره ۲-٤. فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و هر نمایش تحویل‌ناپذیر آن دارای بردار پذیرفتنی باشد، آنگاه G گروهی میانگین‌پذیراست.

برهان. فرض کنید π نمایش تحویل‌ناپذیر دلخواهی باشد که دارای بردار پذیرفتنی است، در این صورت طبق قضیه قبل برای این نمایش داریم، $\pi < \lambda_G$. حال طبق تذکری که در ادامه تعریف آمده است داریم: $\pi \prec \lambda_G$بنابراین طبق قضیه ۲ گروه G میانگین‌پذیر است.

تذکر ۲-۵. بر عکس گزاره فوق در حالت کلی درست نیست، یعنی گروه‌های میانگین‌پذیر داریم که نمایش منظم چپ آنها شامل هیچ نمایش تحویل‌ناپذیری نیستند. برای مثال گروه جمعی $\mathbb{R}$ که یک گروه میانگین‌پذیر است را در نظر بگیرید نمایش منظم چپ روی این گروه به صورت

$$\lambda_G(x)f(t) = f(t-x)$$

تعریف می‌شود. در مرجع (۲) صفحه‌ی ۷۲ نشان داده شده است که نمایش منظم چپ این گروه هیچ زیر نمایش تحویل‌ناپذیری ندارد. به عبارتی این گروه، AR گروه نیست.

به نظر می‌رسد وجود بردار پذیرفتنی برای تمام نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، قوی‌تر از میانگین‌پذیری است، بنابراین ما به شرط قوی‌تری مانند فشردگی نیاز داریم.

گزاره ۲-٦. فرض کنید π نمایش یکانی گروه موضعا فشرده G باشد که دارای بردار پذیرفتنی η است که پایا نیز هست. در این صورت گروه G فشرده است.

برهان. فرض کنید η برداری باشد که هم پایاست و هم پذیرفتنی، طبق تعریف داریم:

$$\|\eta\|^2 = \left\|V_\eta \eta\right\|_2^2$$
$$= \int_G^{\mathbb{R}} |\langle \eta \,.\, \pi(x)\eta\rangle|^2 dx$$
$$= \int_G^{\mathbb{R}} \|\eta\|^4 dx = \|\eta\|^4 \mu(G)$$

بنابراین باید $\mu(G) < \infty$. طبق گزاره ۱ G گروهی فشرده است.

طبق قضیه‌ی پیتر ویل و گزاره‌ی ۱ اگر G یک گروه فشرده باشد آنگاه هر نمایش تحویل‌ناپذیر آن دارای بردار پذیرفتنی است. حال این سوال مطرح است که آیا عکس این مطلب نیز درست است. یعنی اگر هر نمایش تحویل‌ناپذیر از G دارای بردار پذیرفتنی باشد، آیا G فشرده است؟

جواب این پرسش مثبت است. یک فضای هیلبرت یک بعدی را در نظر بگیرید. فرض این که هر نمایش تحویل‌ناپذیر دارای بردار پذیرفتنی است ایجاب می‌کند که نمایش بدیهی نیز دارای بردار پذیرفتنی مانند η باشد. طبق قضیه‌ی ۲٫۲۵ از مرجع $[1]$ داریم:

$$\|\eta\|^2 = V_\eta \eta \in L^2(G)$$

بنابراین تابع ثابت $\|\eta\|^2$ روی G انتگرال‌پذیر است، لذا باید G فشرده باشد.

بنابراین گزاره زیر داریم:

گزاره ۲-۷. فرض کنید G گروه موضعا فشرده باشد، احکام زیر معادل هم هستند:

الف) هر نمایش یکانی تحویل‌ناپذیر G دارای بردار پذیرفتنی است.

ب) گروه G فشرده است.

حال شرط ضعیف‌تر زیر را در نظر می‌گیریم:

(*) فضای هیلبرت H موجود است به طوری‌که هر نمایش یکانی تحویل‌ناپذیر $\pi\colon G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathrm{H})$ دارای بردار پذیرفتنی است.

حال سوال دوم مطرح است، که چه ارتباطی بین شرط (*) و فشردگی وجود دارد؟ واضح است که فشردگی شرط (*) را نتیجه می‌دهد.

تبصره ۲-۸. حالتی را می‌توان در نظر گرفت که شرط برای گروه برقرار است در حالی‌که گروه فشرده نیست. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده و غیر یکه پیمانه‌ای[۷] و H یک فضای هیلبرت باشد. اگر G یک گروه نوع I و جمع مستقیم از همه‌ی نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر $\pi: G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathrm{H})$ باشد، آنگاه شرط (٭) برقرار است در حالی‌که گروه G فشرده نیست. در حقیقت با توجه به این که گروه نوع I و غیر یکه پیمانه‌ای است، طبق مرجع (۱) قضیه‌ی 4.22، نمایش λ_G دارای بردار پذیرفتنی است. لذا طبق گزاره $2.16(a)$ و 2.21 از مرجع (۱) دارای بردار پذیرفتنی است. لذا شرط برقرار است.

گزاره زیر از مرجع (۱) قضیه 2.35 اقتباس شده است.

گزاره ۲-۹. فرض کنید G یک SIN گروه باشد که دارای نمایش تحویل‌ناپذیری است که بردار پذیرفتنی دارد در این صورت گروه G فشرده است.

ایده اثبات این قضیه به این صورت است، ابتدا نشان داده می‌شود که اگر π نمایش سری‌های گسسته‌ی مذکور در فرض قضیه باشد، آنگاه فضای هیلبرت آن متناهی‌البعد است یعنی $\dim(H_\pi) < \infty$ لذا $H_\pi = \mathbb{C}^n$. اگر گروه G فشرده نباشد با توجه به σ فشرده بودن آن دنباله‌ی $(C_n)_n$ از زیر مجموعه‌های فشرده G وجود دارد به طوری‌که شرط لازم و کافی برای فشردگی زیر مجموعه‌ی A از G این است که به ازای یک $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $A \subset C_n$. حال از روی این دنباله از مجموعه‌های فشرده دنباله‌ای خارج از آنها مانند $(x_n)_n$ ساخته می‌شود که برای آن داریم،

$$V_\eta \eta(x_n) \longrightarrow 1$$

این نتیجه با این مطلب که توابع ضریب عضو $C_\circ(G)$ هستند در تناقض است. لذا گروه G باید فشرده باشد.

نتیجه ۲-۱۰. گروه گسسته‌ای که دارای بردار پذیرفتنی است متناهی است، چراکه هر گروه گسسته، SIN گروه است و اگر فشرده باشد پس متناهی خواهد بود. همچنین SIN گروهی که AR گروه است فشرده است.

نتیجه ۲-۱۱. گروه‌های غیرفشرده، AR گروه نیستند. بنابراین گروه‌های گسسته نامتناهی AR گروه نیستند. یک مثال از این نوع گروه گسسته $\mathbb{Z}$ است.

وجود بردار پذیرفتنی با سه موضوع در خصوص گروه‌های موضعاً فشرده قابل بررسی است، SIN گروه بودن، AR گروه بودن و برقراری شرط

$B_\circ(G) = A(G)$.

برای تعاریف بیشتر و اطلاع از این خواص می‌توان از مراجع (۶)، (۷) و (۸) استفاده نمود.

طبق 1.1 از مرجع (۶) اگر $B_\circ(G) = A(G)$ برقرار باشد، آنگاه G یک AR گروه است.

گزاره ۲-۱۲. اگر G یک SIN گروه همبند باشد که هیچ نمایش سری گسسته ندارد. آنگاه $B_\circ(G) \neq A(G)$. این گزاره نتیجه مستقیم 3.4.2 از مرجع (۸) و 3.25 از مرجع (۱) می‌باشد.

با وارد نمودن خاصیت وجود بردارهای پذیرفتنی، مطلب زیر به آسانی بدست می‌آید:

طبق قضیه 3.25 از مرجع (۱)، اگر G، SIN گروهی باشد که $AR-$ گروه هم هست، آنگاه فشرده است. برقراری تساوی $B_\circ(G) = A(G)$ و SIN گروه بودن نیز فشردگی را نتیجه می‌دهد.

$B_\circ(G) \neq A(G)$.

در حالت کلی، برای گروه‌های آبلی غیرفشرده داریم،

$$B_\circ(G) \neq A(G)$$

این مطلب در (۹) ثابت شده است.

نویسندگان مقاله‌ی فوق، در مطالعه‌ی نمایش‌های گروه $ax+b$، یعنی گروه آفینی ثابت کردند برای این گروه تساوی $B_\circ(G) = A(G)$ برقرار است.

[7] Non unimodular

فهرست منابع

[1] H Fuhr (2005). Abstract Harmonic Analysis of continuous Wavelet Transforms, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[2] G.B Folland (1995). A course in abstract harmonic analysis, Boca Raton: CRC Press.

[3] B Bekka, P Harpe and A Valette (2008). Kazhdan's property (T).

[4] B Bekka (1990). Amenable unitary representation of locally compact groups.

[5] A Hulanicki (1964). Groups whose regular representation weakly contains all unitary representations, Studia Math.

[6] K.T.a.L Baggett (1978). Groups with compleely reducible regular representation, Proc. Amer. Math.

[7] L Baggett (1990). Unimodularity and Atomic Plancherel Measure, Math.

[8] M Ghandehari (2010). Harmonic analysis of Rajchman algebras, Canada: Waterloo.

[9] P Jorgensen, K Merrill and Packer Representations (2008). Wavelet and Frames, Bikhuser.

[10] P Eymard (1964). L'algebre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math France.

[11] M Duflo and C Moore (1976). On the regular representation of nonunimodular locally compact group.

[12] J Dixmier (1977). C*-Algebras, North Holland Amesterdam.

[13] E.K.a.K.F TAYLOR (2013). Induced Representations of Locally Compact Groups, New York: CAMBRIDGE TRACTS IN MATHEMATICS.

[14] E Hewit and H.S Zuckerman (1966). Singular measures with absolutely continuous convolution squares, Proc. Cambridge Philos.

.