

## یک زیر فضای خاص از فضاهای وزن دار از توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی

محمد علی اردلانی\*

استادیار، گروه ریاضی محض (آنالیز)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۲/۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۷/۲

### چکیده

هدف ما در این مقاله تعریف مفاهیم وزن، فضاهای وزن دار از توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی و بررسی دو دسته خاص از این فضاهای وزن دار از این توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی می‌باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که این فضاهای وزن دار از این توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی با نرم سوپریمم وزنی که روی آنها تعریف می‌شود فضاهای باناخ هستند. سپس این فضاهای وزن دار از این توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی را از یک جنبه جدید که تا کنون مورد توجه قرار نگرفته است بررسی خواهیم کرد. در واقع نشان خواهیم داد بدون اینکه لازم باشد تابع وزن در هیچ شرط سرعت رشدی برای محدود کردن سرعت رشد از بالا یا پایین (ساختن کران بالا یا پایین) یا شرط حدی خاصی (بجز پیوستگی روی نیم صفحه بالایی) صدق کند هر فضای وزن دار از توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی دارای یک زیر فضای خاص است، که به صورت اشتراک شمارش پذیر از مجموعه‌های بسته قابل نوشتن می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** فضای باناخ، قضیه رسته‌ایی بئر، مجموعه  $F_\sigma$ ، نرم سوپریمم وزنی.

## ۱- مقدمه

اشاره کرد. یک حالت بسیار مهم دیگر از فضاهای وزن دار وقتی به وجود می‌آید که  $\Omega = G = \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im } \omega > 0\}$  انتخاب شود. بررسی کلاس‌های یکرختی  $H_\nu(G)$  و همچنین کرانداری عملگر ترکیب و عملگر مشتق بین این فضاها، در حالتی که وزن  $\nu$  در شرایط رشدی خاصی صدق می‌کند، توسط لوسکی واردلانی انجام شد [9,10].

هدف این مقاله طرح یک سوال جدید در باره  $H_\nu(G)$  می‌باشد که تا کنون مورد توجه قرار نگرفته است. در واقع سوالی که حال می‌خواهیم مطرح کنیم این است که چه زیر فضایی از  $H_\nu(G)$  را می‌توان به صورت یک  $F_\sigma$  (اجتماع شمارش پذیر از مجموعه‌های بسته) یا به صورت یک  $G_\sigma$  (اشتراک شمارش پذیر از مجموعه‌های باز) نوشت؟

ما در قضیه ۱ در یک حالت خاص به این سوال جواب داده و نشان می‌دهیم که  $H_{\nu_0}(G)$  یک زیر فضای  $F_\sigma$  از  $H_\nu(G)$  است بدون اینکه لازم باشد که وزن  $\nu$  در شرایط رشدی یا شرایط حدی مانند آنچه در [۹] فرض شده است صدق کند.

## ۲- نتایج اصلی

در ابتدا ثابت می‌کنیم که  $H_\nu(G)$  و  $H_{\nu_0}(G)$  فضاهای باناخ هستند. اما برای این منظور ابتدا به یادآوری قضیه شناخته شده زیر از آنالیز مختلط می‌پردازیم.

**قضیه ۱ [11]:** فرض کنید  $f_n(\omega)$  دنباله ایی از توابع تحلیلی باشد که بر زیر مجموعه‌های فشرده از  $G$  به تابع  $f(\omega)$  همگرایی یکنواخت است. در اینصورت  $f(\omega)$  در  $G$  تحلیلی است.

**لم ۱:** اگر  $\{f_n\}$  یک دنباله کوشی در  $H_\nu(G)$  باشد، آنگاه روی هر زیر مجموعه فشرده از  $G$  بطور یکنواخت همگرا است.

اثبات: فرض کنید  $\{f_n\}$  یک دنباله کوشی در  $H_\nu(G)$  باشد و فرض کنید  $K \subset G$  فشرده باشد.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \|f_n - f_m\|_\nu < \varepsilon$$

فرض کنید  $\Omega$  یک زیر مجموعه باز از صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  باشد. یک تابع پیوسته و مثبت  $\nu: \Omega \rightarrow (0, \infty)$  را یک تابع وزن می‌نامیم. برای هر تابع هولومورفیک  $f, f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  نرم سوپریمم وزنی  $\|f\|_\nu$  و فضای وزن دار از توابع هولومورفیک روی  $\Omega$ ،  $H_\nu(\Omega)$  را به ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\nu = \text{Sup}_{z \in \Omega} |f(z)| \nu(z)$$

9

$$H_\nu(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_\nu < \infty\}.$$

همچنین گوئیم  $|f|_\nu$  در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک زیر مجموعه فشرده از  $\Omega$  مانند  $K$  وجود داشته باشد بطوریکه

$$|f(z)| \nu(z) < \varepsilon \quad \forall z \in \Omega \setminus K$$

با استفاده از تعریف فوق می‌توان  $H_{\nu_0}(\Omega)$  را به عنوان یک زیر فضای از  $H_\nu(\Omega)$  به صورت زیر تعریف کرد

$$H_{\nu_0}(\Omega) = \{f \in H_\nu(\Omega) : |f|_\nu \text{ در بی‌نهایت صفر می‌شود}\}.$$

ثابت خواهیم کرد که  $H_\nu(\Omega)$  همراه با  $\|\cdot\|_\nu$  یک فضای باناخ و  $H_{\nu_0}(\Omega)$  یک زیر فضای بسته از  $H_\nu(\Omega)$  است. فضاهای وزن دار از توابع هولومورفیک (و از توابع هارمونیک) اولین بار توسط شیلدز و ویلیامز در سال ۱۹۷۲ در حالتی که  $\Omega = D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  گوی یکه باز بود معرفی شدند. آنها در سری مقالات خود، با این فرض که وزن  $\nu$  در شرایط خاصی صدق می‌کند به بررسی این فضاها از جنبه‌های مختلف پرداختند [1,2,3]. پس از باز شدن این زمینه‌ی تحقیقاتی جدید، تحقیقات زیادی از جنبه‌های مختلف روی این فضاها توسط ریاضیدانان متعددی انجام گرفت، که از جمله کارهای برجسته در این زمینه می‌توان به مقالات لوسکی [4,5,6] بونت، دومانسکی و لیندستروم [7,8]

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \\ \|f_n - f_m\|_v < \varepsilon. \\ \|f_n - f_m\|_v = \sup_{\omega \in G} |f_m(\omega) - f_n(\omega)|v(\omega) < \varepsilon. \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \\ \|f_m v - f_n v\|_\infty < \varepsilon. \end{aligned}$$

یعنی دنباله  $\{f_m v\}$  یک دنباله کوشی نسبت به  $\|\cdot\|_\infty$  است. اما  $H_v(G)$  با نرم سوپریمم یک فضای باناخ است، پس تابع  $g$  وجود دارد که  $f_m v \rightarrow g$  روی  $K$  فشرده همگرایی یکنواخت است. بنابراین  $f_m \rightarrow \frac{g}{v}$  بطور یکنواخت روی  $K$ . پس

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \sup_{\omega \in G} |f(\omega)|v(\omega) \\ &= \sup_{\omega \in G} \left| \frac{g(\omega)}{v(\omega)} \right| v(\omega) = \\ &= \sup_{\omega \in G} |g(\omega)| < \infty. \end{aligned}$$

در نتیجه  $f \in H_v(G)$ . اثبات برای  $H_{v_0}(G)$  مشابه است.

**نتیجه ۱:**  $H_{v_0}(G)$  فضای باناخ و زیر فضای  $H_v(G)$  است. بنابراین  $H_{v_0}(G) \subset H_v(G)$  بسته است.

**تعریف ۱:** به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  مجموعه  $B_n$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} B_n &= \{f \in H_{v_0}(G) : \exists \omega \in G. |\omega| \\ &\leq n. |f(\omega)|v(\omega) \\ &= \|f\|_v\} \end{aligned}$$

**قضیه ۳:** فرض کنید  $v$  یک وزن روی  $G$  باشد. در اینصورت  $H_{v_0}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  همچنین

- (۱) به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  یک مجموعه بسته در  $H_{v_0}(G)$  است، نسبت به  $\|\cdot\|_v$ .
- (۲) حداقل یک  $n_0 \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که  $B_{n_0}^o \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \\ \sup_{\omega \in G} |f_m(\omega) - f_n(\omega)|v(\omega) < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \forall \omega \in G \\ |f_m(\omega) - f_n(\omega)|v(\omega) < \varepsilon. \end{aligned}$$

چون  $K \subset G$  پس:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \forall \omega \in K \\ |f_m(\omega) - f_n(\omega)|v(\omega) < \varepsilon. \end{aligned}$$

حال چون  $K$  فشرده و  $v$  تابع پیوسته است لذا مینیمم خود را روی  $K$  اختیار می‌کند. یعنی

$$\exists \omega_0 \in K \text{ s.t. } \min_{\omega \in K} v(\omega) = v(\omega_0)$$

حال

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \forall \omega \in K \\ |f_m(\omega) - f_n(\omega)|v(\omega_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\forall \omega \in K |f_m(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{v(\omega_0)}.$$

پس دنباله  $\{f_n\}$  یک دنباله کوشی یکنواخت روی  $K$  است و در نتیجه دنباله  $\{f_n\}$  روی  $K$  همگرایی یکنواخت است.

**قضیه ۲:**  $H_v(G)$  و  $H_{v_0}(G)$  فضاهای باناخ هستند.

**اثبات:** فرض کنید  $\{f_n\}$  یک دنباله کوشی در  $H_v(G)$  باشد باید ثابت کنیم

$$\exists f \in H_v(G) \text{ s.t. } f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_v} f.$$

فرض کنید  $K \subset G$  دلخواه، فشرده باشد. بنا به لم ۱ دنباله  $\{f_n\}$  روی  $K$  به تابعی مانند  $f$  در  $\|\cdot\|_v$  همگرایی یکنواخت است. پس بنا به قضیه ۱  $f$  روی  $G$  تحلیلی است.

$$H_{v_0}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

برای اثبات قسمت ۱، فرض کنید که  $n_0 \in \mathbb{N}$  دلخواه داده شده باشد. همچنین فرض کنید  $g \in \overline{B_{n_0}}$

بنابراین یک دنباله  $\{f_n\} \subseteq B_{n_0}$  وجود دارد بطوریکه  $f_n \rightarrow g$  در  $\|\cdot\|_v$ . چون  $H_{v_0}(G)$  یک فضای باناخ است بنابراین  $g \in H_{v_0}(G)$ . لذا کافی است ثابت کنیم که  $\omega_0 \in G$  وجود دارد به طوریکه  $|\omega_0| \leq n_0 \cdot |g(\omega_0)|v(\omega_0) = \|g\|_v$

چون به ازای هر  $f_n \in B_n$ ،  $n \in \mathbb{N}$   $\forall n \in \mathbb{N} \exists \omega_n \in G$  s.t.  $|\omega_n| \leq n_0 |f_n(\omega_n)|v(\omega_n) = \|f_n\|_v$  (۳)

از آنجایی که  $\{\omega_n\}$  یک دنباله کراندار در  $G$  است بنابراین، از قضیه بولتسانو-وایرشراس نتیجه می‌شود که یک زیر دنباله‌ی همگرا از  $\{\omega_n\}$  مانند  $\{\omega_{n_k}\}$  وجود دارد، به طوریکه  $\omega_{n_k} \rightarrow \omega_0$ . چون یک تناظر ۱-۱ بین  $f_n$ ها و  $\omega_n$ ها وجود دارد، بنابراین  $f_{n_k} \rightarrow g$  در نرم  $\|\cdot\|_v$ . فرض کنید  $\varepsilon > 0$  داده شده باشد در نتیجه  $m_0 \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوریکه به ازای هر  $n_k \geq m_0$

$$\left| \|f_{n_k}\|_v - \|g\|_v \right| \leq \|f_{n_k} - g\|_v \leq \varepsilon \quad (۴)$$

$A = \{\omega \in G : |\omega| \leq n_0\}$  را در نظر بگیرید، چون تابع  $|g|v$  روی  $G$  پیوسته و  $A \subseteq G$  فشرده است پس  $|g|v$  روی  $A$  پیوسته یکنواخت و در نتیجه  $\delta > 0$  وجود دارد به طوریکه

$$|\omega - \tilde{\omega}| < \delta \Rightarrow \left| |g(\omega)| - v(\omega) - |g(\tilde{\omega})|v(\tilde{\omega}) \right| < \varepsilon \quad \forall \omega, \tilde{\omega} \in A$$

$\omega_0 \in A$ ،  $\omega_{n_k} \rightarrow \omega_0$  بنابراین  $m_1 \in \mathbb{N}$  وجود دارد بطوریکه

$$|\omega_{n_k} - \omega_0| < \delta \quad \forall n_k \geq m_1$$

**اثبات:** بدیهی است که  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq H_{v_0}(G)$ . بلعکس، فرض کنید  $f \in H_{v_0}(G)$ . اگر  $f = 0$  آنگاه به وضوح به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $f \in B_n$  اما اگر  $f \in H_{v_0}(G)$  و  $f \neq 0$ ، کافیست  $\varepsilon = \frac{\|f\|_v}{2} > 0$  اختیار کنیم. چون  $|f|v$  در بی نهایت صفر می‌شود، پس  $K$  زیر مجموعه فشرده  $G$  وجود دارد به طوریکه

$$\forall \omega \in G \setminus K \quad |f(\omega)|v(\omega) < \frac{\|f\|_v}{2}$$

$|f|v$  یک تابع پیوسته روی  $G$  و  $K \subseteq G$  فشرده است پس  $|f|v$  روی  $K$  ماکزیمم خود را در نقطه‌ای مانند  $\omega_0$  اختیار می‌کند یعنی

$$\text{Sup}_{\omega \in K} |f(\omega)|v(\omega) = |f(\omega_0)|v(\omega_0)$$

همچنین بدیهی است که

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \max \left( \text{Sup}_{\omega \in K} |f(\omega)|v(\omega), \text{Sup}_{\omega \in G \setminus K} |f(\omega)|v(\omega) \right) \\ &< \max \left( |f(\omega_0)|v(\omega_0), \frac{\|f\|_v}{2} \right) \end{aligned}$$

اگر

$$\max \left( |f(\omega_0)|v(\omega_0), \frac{\|f\|_v}{2} \right) = \frac{\|f\|_v}{2}$$

آنگاه  $\|f\|_v < \frac{\|f\|_v}{2}$  که تناقض است. بنابراین

$$\max \left( |f(\omega_0)|v(\omega_0), \frac{\|f\|_v}{2} \right) = |f(\omega_0)|v(\omega_0)$$

و در نتیجه

$$\|f\|_v \leq |f(\omega_0)|v(\omega_0) \quad (۱)$$

از طرف دیگر

$$|f(\omega_0)|v(\omega_0) \leq \text{Sup}_{\omega \in K} |f(\omega)|v(\omega) = \|f\|_v \quad (۲)$$

حال از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

در نتیجه

$$\begin{aligned} |g(\omega_{n_k})|v(n_k) - |g(\omega_0)|v(\omega_0)| &< \varepsilon \\ \forall n_k \geq m_1 & \quad (5) \end{aligned}$$

حال اگر  $m_2 = \max\{m_0, m_1\}$  اختیار شود، آنگاه روابط (۳)، (۴) و (۵) برای هر  $m \geq m_2$  برقرار هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} & \|g\|_v - |g(\omega_0)|v(\omega_0)| \\ & \leq \|f_{n_k}\|_v - \|g\|_v \\ & \quad + \|f_{n_k}\|_v \\ & \quad - |g(\omega_0)|v(\omega_0)| \\ & < \varepsilon + |f_{n_k}(\omega_{n_k})|v(\omega_{n_k}) \\ & \quad - |g(\omega_0)|v(\omega_0)| \\ & < \varepsilon + |f_{n_k}(\omega_{n_k})|v(\omega_{n_k}) \\ & \quad - |g(\omega_{n_k})|v(n_k)| \\ & \quad + |g(\omega_{n_k})|v(n_k)| \\ & \quad - |g(\omega_0)|v(\omega_0)| \\ & < \varepsilon + \|f_{n_k} - g\|_v + \varepsilon < 3\varepsilon \end{aligned}$$

برای اثبات قسمت ۲ از بکار بردن قضیه رسته‌ایی بئر و اینکه  $H_{v_0}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  نتیجه می‌شود که  $n_0 \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که  $(\overline{B_{n_0}})^o \neq \emptyset$ . حال از قسمت (۱) نتیجه می‌شود که  $B_{n_0}^o \neq \emptyset$ .

**نتیجه ۲:** فرض کنید  $n_0 \in \mathbb{N}$  طوری باشد که  $(\overline{B_{n_0}})^o \neq \emptyset$  در این صورت  $f_0 \in B_{n_0}$  و  $\varepsilon > 0$  وجود دارند به طوری که هر  $f \in B_{n_0}$  که  $f \neq 0$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} f &= \frac{\|f\|_v}{2\varepsilon} \left( f_0 + \varepsilon \frac{f}{\|f\|_v} \right) \\ & \quad + \frac{\|f\|_v}{2\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon f}{\|f\|_v} - f_0 \right) \end{aligned}$$

در واقع اگر

$$B = \{f \in H_{v_0}(G) : \|f\|_v \leq 1\}$$

$$B \subseteq \frac{1}{2\varepsilon} B_{n_0} + \frac{1}{2\varepsilon} B_{n_0}$$

plane, *Studia math.* 209(2012), 225-234.

### فهرست منابع

[10] M.A.Ardalani and W.Lusky, weighted spaces of holomorphic functions on the upper half-plane *math, Scandinavica*, 111(2012), 224-260.

[11] S. Lang, *Complex Analysis*, Springer Verlag, New York, 1999.

[1] A.L.Shields, D.L. Williams, Bounded projections and the growth of harmonic conjugates in the disc, *Michigan Math. J.* 3(1982), 3-25.

[2] A.L.Shields, D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions, *J. Reine. Angew Math.* 299/300 (1978), 265-279.

[3] A.L.Shields, D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 162 (1971), 287-302.

[4] W.Lusky, on the isomorphism classes of weighted spaces of harmonic and holomorphic functions, *Studia Math.* 1(2006), 19-45.

[5] W.Lusky, on weighted spaces of harmonic and holomorphic functions, *J. Lond. Math Soc.* 51(1995), 309-320.

[6] W.Lusky, Growth conditions for harmonic and holomorphic functions, *Functional Analysis (Trier, 1994)*, S. Dierolf et al. (Ed), de Gruyter (1996), 281-291.

[7] J.Bonet, P.Domanski, M.Lindstrom, pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions, *Studia math.* 137(1999), 177-194.

[8] J.Bonet, P.Domanski, M.Lindstrom, Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, *Canad. Math. Bull.* 42(1999), 139-148.

[9] M.A.Ardalani and W.Lusky, Bounded operators on weighted spaces of holomorphic functions on upper half