

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸

**JNRM**  
دانشگاه آزاد اسلامی

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## برخی نتایج درباره آیزوکلینیسیم در جبرهای لی

همایون عربیانی<sup>۱</sup>، حمید دارابی<sup>۲\*</sup>

<sup>(۱)</sup> استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نیشابور، نیشابور، ایران

<sup>(۲)</sup> استادیار، گروه ریاضی، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، اسفراین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۹/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۷/۰۲

### چکیده

آیزوکلینیسیم در طبقه‌بندی جبرهای لی کاربرد گسترده‌ای دارد. این مفهوم نسبت به مفهوم یکرختی دارای ساختار ضعیف‌تری است. آیزوکلینیسیم جبرهای لی ابتدا توسط مانیهان معرفی شد و بعد از آن توسط دیگران به  $n$ -آیزوکلینیسیم در جبرهای لی و همچنین آیزوکلینیسیم در یک جفت از جبرهای لی تعمیم داده شد. در این مقاله، به بررسی  $n$ -آیزوکلینیسیم در جبرهای لی می‌پردازیم و برخی ویژگی‌های  $n$ -آیزوکلینیسیم را در جبرهای لی اثبات می‌کنیم. از جمله، اثبات می‌کنیم که اگر  $L_1$  و  $L_2$  دو جبر لی باشند که اشتراک مرکز و زیرجبر فراتینی در آن‌ها صفر باشد، آیزوکلینیسیمی  $L_1$  و  $L_2$ ، معادل یکرختی فاکتورهای مرکزی آن دو است.

واژه‌های کلیدی:  $n$ -آیزوکلینیسیم، زیرجبر فراتینی، جبر لی تنه‌ای.

### ۱- مقدمه

طبقه‌بندی یکی از موضوعات اساسی در نظریه گروه‌ها می‌باشد. فیلیپ هال [۱] در سال ۱۹۴۰، مفهوم آیزوکلینیسیم گروه‌ها را معرفی کرد. این مفهوم نسبت به یکرختی گروه‌ها ضعیف‌تر است. یعنی اگر دو گروه با هم یکرخت باشند آن گاه آیزوکلینیسیم هستند اما عکس این مطلب درست نیست. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۲]، [۳]، [۴] و [۵] مراجعه نمود.

مانیهان [۶] در سال ۱۹۹۴ به طور مشابه مفهوم آیزوکلینیسیم را برای جبرهای لی معرفی و اثبات کرد که مفاهیم آیزوکلینیسیم و یکرختی در جبرهای لی از بُعد متناهی یکسان هستند. برخی از کاربردها و نتایج بیشتر در این زمینه را می‌توان در [۷] و [۸] مشاهده نمود. در [۹] آیزوکلینیسیم جبرهای لی به  $n$ -آیزوکلینیسیم تعمیم داده شده است.

فرض کنیم  $L_1$  و  $L_2$  دو زیرجبر از جبر لی  $L$  باشند. در این صورت زیرفضای تولید شده توسط بردارهای  $[l_1, l_2]$  که در آن  $l_i \in L_i$  ( $i=1, 2$ ) را با نماد  $[L_1, L_2]$  نمایش می‌دهیم. همچنین قرار می‌دهیم  $L^1 = L$  و برای هر  $n$  طبیعی تعریف می‌کنیم  $L^n = [L^{n-1}, L]$ . اگر عدد مثبت  $c$  وجود داشته باشد به طوری که  $L^c = 0$ ، جبر لی  $L$  را پوچتوان می‌نامیم. زیرجبر  $L^2 = [L, L]$  را زیرجبر مشتق  $L$  می‌نامیم. اگر  $L^2 = 0$ ، جبر لی  $L$  اَبلی نامیده می‌شود. مرکز  $L$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(L) = \{x \in L : [x, L] = 0\}$$

جبر لی  $L$  را تنه‌ای گویند، هر گاه  $Z(L) \subseteq L^2$ .

اشتراک زیرجبرهای بیشین جبر لی  $L$  را زیرجبر فراتینی  $L$  می‌نامند و آن را با  $\Phi(L)$  نمایش می‌دهند.

سری‌های مرکزی پایینی و بالایی جبر لی  $L$  به ترتیب عبارتند از:

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \dots \supseteq L^{n+1} \supseteq \dots$$

و

$$0 = Z_0(L) \subseteq Z_1(L) = Z(L) \subseteq Z_2(L) \subseteq \dots$$

که در آن  $L^{n+1} = [L, L^n]$  و  $Z_n(L)/Z_{n-1}(L) = Z(L/Z_{n-1}(L))$

فرض کنیم  $L$  و  $H$  دو جبر لی و  $\alpha: \frac{L}{Z_n(L)} \rightarrow \frac{H}{Z_n(H)}$

و  $\beta: L^{n+1} \rightarrow H^{n+1}$  همریختی‌هایی از جبرهای لی باشند به طوری که نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} \frac{L}{Z_n(L)} \times \dots \times \frac{L}{Z_n(L)} & \xrightarrow{\alpha} & L^{n+1} \\ \downarrow \alpha^{n+1} & & \downarrow \beta \\ \frac{H}{Z_n(H)} \times \dots \times \frac{H}{Z_n(H)} & \xrightarrow{\psi} & H^{n+1} \end{array}$$

نگاشت‌های  $\varphi$  و  $\psi$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\varphi(\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_{n+1}) = [l_1, \dots, l_{n+1}]$$

برای هر  $\bar{l}_i = l_i + Z_n(L) \in L/Z_n(L)$  و

برای هر  $\bar{h}_i = h_i + Z_n(H) \in H/Z_n(H)$

$$\bar{h}_i = h_i + Z_n(H) \in H/Z_n(H)$$

در این صورت جفت  $(\alpha, \beta)$  را یک  $n$ -آیزوکلینیسیم بین  $L$  و  $H$  و دو جبر لی  $L$  و  $H$  را  $n$ -آیزوکلینیک می‌نامیم. اگر  $n=1$  آنگاه مفهوم آیزوکلینیسیم در [۶] به دست می‌آید.

### ۲- نتایج اصلی

در این بخش برخی از ویژگی‌های آیزوکلینیسیم را درباره جبرهای لی مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا به بیان چند لم مقدماتی از [۹] می‌پردازیم که در اثبات نتایج اصلی مفید واقع می‌شوند.

**لم ۱.۲:** فرض کنیم  $(\alpha, \beta)$  یک  $n$ -آیزوکلینیسیم بین

جبرهای لی  $L$  و  $H$  باشد، در این صورت برای هر  $i \geq 0$

$$\alpha \left( \frac{L^{i+1} + Z_n(L)}{Z_n(L)} \right) = \frac{H^{i+1} + Z_n(H)}{Z_n(H)} \quad (۱)$$

$$\beta \left( \frac{L^{n+1} \cap Z_i(L)}{Z_n(L)} \right) = H^{n+1} \cap Z_i(H) \quad (۲)$$

**لم ۲.۲:** فرض کنیم  $L$  یک جبر لی و  $N$  ایده‌آل

باشد، در این صورت

$$L^{n+1} \cap Z_{n+i}(L) = 0$$

لذا، با توجه به قسمت ب از لم ۲.۲، برای هر  $i \geq 1$ ،  $Z_{n+i}(L) \subseteq Z_n(L)$

در نتیجه  $Z_n(L)$  یک ابرمرکز  $L$  می‌باشد.

**قضیه ۶.۲:** فرض کنیم  $L_1$  و  $L_2$  دو جبر لی باشند، به طوری که

$$L_1^{n+1} \cap Z_n(L_1) = L_2^{n+1} \cap Z_n(L_2) = 0$$

در این صورت  $L_1 \sim_{n+1} L_2$  اگر و تنها اگر  $L_1 \sim_n L_2$ .  
**برهان:** اگر  $L_1 \sim_{n+1} L_2$  آنگاه به وسیله یک یکرختی  $\alpha$ ،  $L_1/Z_{n+1}(L_1) \cong L_2/Z_{n+1}(L_2)$

بنابراین با توجه به قضیه ۵.۲

$$L_1/Z_n(L_1) \cong L_2/Z_n(L_2)$$

در نتیجه  $\alpha$  یک یکرختی از  $(L_1/Z_n(L_1))^{n+1}$  به  $(L_2/Z_n(L_2))^{n+1}$  القا می‌کند. بنابراین  $L_1^{n+1} \cong L_2^{n+1}$  و لذا اثبات کامل است.

اکنون با توجه به آنچه بیان شد، می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد.

**قضیه ۷.۲:** فرض کنیم  $L$  یک جبر لی باشد به طوری که  $L^{n+1} \cap Z_n(L) = 0$ . در این صورت یک جبر لی یکتای  $S$  وجود دارد به طوری که

$$Z_n(S) = 0, S \square_n L.$$

در حالت ویژه  $Z_n(S) \subseteq S^{n+1}$ .

**برهان:** فرض کنیم  $L$  یک جبر لی باشد به طوری که  $L^{n+1} \cap Z_n(L) = 0$

در این صورت با توجه به لم ۲.۲، یک جبر لی  $T_1$  وجود دارد به طوری که

$$L \square_n T_1, Z(T_1) \cap T_1^n < T_1^{n+1}$$

بنابراین

الف: اگر  $N \cap Z(L) = 0$  آنگاه برای هر  $n \geq 1$ ،  $N \cap Z_n(L) = 0$

ب: اگر برای یک  $n \geq 1$ ،  $N \cap L^{n+1} = 0$  آنگاه  $N \subseteq Z_n(L)$ .

**لم ۳.۲:** فرض کنیم  $L$  یک جبر لی باشد و  $n \geq 1$ . در این صورت یک جبر لی  $T$  وجود دارد به طوری که:  $L \sim_n T$  و  $Z(T) \cap T^n \leq T^{n+1}$  یادآوری می‌کنیم که اگر  $L$  یک جبر لی و  $\alpha$  یک عدد ترتیبی باشد، آنگاه  $Z_\alpha(L)$  از سری مرکزی بالایی  $L$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_{\alpha+1}(L)/Z_\alpha(L) = Z(L/Z_\alpha(L))$$

به طوری که  $Z_0(L) = 0$  و  $Z_\lambda(L) = \bigcup_{\alpha < \lambda} Z_\alpha(L)$  به وضوح یک عدد ترتیبی  $\beta$  وجود دارد به طوری که:  $Z_\beta(L) = Z_{\beta+1}(L) = \dots$

که ابرمرکز  $L$  نامیده می‌شود.

**گزاره ۴.۲:** فرض کنیم  $L$  یک جبر لی پوچتوان باشد به طوری که  $Z(L) \cap \Phi(L) = 0$  در این صورت  $Z(L)$  یک ابرمرکز  $L$  است.

**برهان:** با توجه به [۱۰]، در جبرهای لی پوچتوان، فراتینی و مشتق برابرند و لذا

$$L^2 \cap Z(L) = \Phi(L) \cap Z(L)$$

بنابراین با توجه به لم ۲.۲ برای هر  $n > 0$  داریم  $L^2 \cap Z_n(L) = 0$  و لذا  $Z(L) = Z_n(L)$ . در نتیجه  $Z(L)$  یک ابر مرکز  $L$  است.

**قضیه ۵.۲:** فرض کنیم  $L$  یک جبر لی باشد به طوری که  $L^{n+1} \cap Z_n(L) = 0$  در این صورت  $Z_n(L)$  یک ابرمرکز  $L$  است.

**برهان:** فرض کنیم  $L^{n+1} \cap Z_n(L) = 0$ . در این صورت  $L^{n+1} \cap Z(L) \subseteq L^{n+1} \cap Z_n(L) = 0$

بنابراین، با توجه به قسمت الف از لم ۲.۲، برای هر  $i \geq 1$ ،

بنابراین  $Z(S)$  یک ابرمرکز از  $S$  است و در نتیجه برای هر  $n$  داریم:  $Z_n(S) = 0$ .

اکنون، فرض کنیم  $\Psi$  یک خانواده از جبرهای لی آیزوکلینیک مانند  $L$  باشد، به طوری که  $Z(L) \cap L^2 = 0$ . چون مرکز هر جبر لی تنه‌ای از  $\Psi$  بدیهی است، بنابراین، خانواده  $\Psi$  دارای یک جبر لی تنه‌ای یکتای  $L/Z(L)$  است و در نتیجه حکم ثابت است.

نتایج زیر با توجه به گزاره ۲.۴ و قضیه ۲.۸ به دست می‌آیند.

**نتیجه ۹.۲:** فرض کنیم  $L_1$  و  $L_2$  دو جبر لی باشند به طوری که  $\Phi(L_i) \cap Z(L_i) = 0$  ( $i=1,2$ ) و  $L_1 \sim L_2$ . در این صورت  $L_1/Z_n(L_1) \cong L_2/Z_n(L_2)$ .

**نتیجه ۱۰.۲:** فرض کنیم  $L_1$  و  $L_2$  دو جبر لی باشند به طوری که

$$\Phi(L_i) \cap Z(L_i) = 0 \quad (i=1,2).$$

در این صورت  $L_1 \sim L_2$  اگر و تنها اگر  $L_1 \sim_n L_2$ .

$$Z(T_1) \cap T_1^n \leq T_1^{n+1} \cap Z_n(T_1)$$

از طرفی، با توجه به لم ۱.۲

$$L^{n+1} \cap Z_n(L) \cong T_1^{n+1} \cap Z_n(T_1)$$

در نتیجه  $Z(T_1) \cap T_1^n = 0$ . اکنون، به وسیله قسمت الف از لم ۲.۲ داریم  $Z_n(T_1) \cap T_1^n = 0$  و بنابراین به وسیله قسمت ب از لم ۲.۲،  $Z_n(T_1) \subseteq Z_{n-1}(T_1)$  و لذا  $Z_{n-1}(T_1) \cap T_1^n = 0$ .

به طور مشابه، یک جبر لی  $T_2$  وجود دارد به طوری که  $T_1 \square_{n-1} T_2$ .

با ادامه این فرایند، جبرهای لی  $T_n$  و  $T_{n-1}$  وجود دارند به طوری که  $Z(T_n) \cap T_n \subseteq T_n^2$  و  $T_{n-1} \sim T_n$  در نتیجه  $Z(T_n) = Z(T_n) \cap T_n^2 \cong Z(T_{n-1}) \cap T_{n-1}^2 = 0$ .

قرار می‌دهیم  $T_n = S$  و بنابراین داریم  $Z_n(S) = 0$ . اکنون فرض کنیم  $S_1$  جبر لی دیگری باشد به طوری که  $L \sim_n S_1$  و  $Z_n(S_1) \subseteq S_1^{n+1}$ . لذا با توجه به لم ۱.۲،  $Z_n(S) \cap S^{n+1} \cong Z_n(S_1) \cap S_1^{n+1}$  و  $S \sim_n S_1$  بنابراین  $S \cong S_1$  و  $Z_n(S) \cong Z_n(S_1) = 0$ .

**قضیه ۸.۲:** فرض کنیم  $L_1$  و  $L_2$  دو جبر لی باشند، به طوری که  $\Phi(L_i) \cap Z(L_i) = 0$  ( $i=1,2$ ) در این صورت  $L_1 \sim L_2$  اگر و تنها اگر  $L_1/Z(L_1) \cong L_2/Z(L_2)$ .

**برهان:** فرض کنیم  $L$  یک جبر لی باشد به طوری که  $L^2 \cap Z(L) = 0$  و  $S$  یک جبر لی تنه‌ای باشد به طوری که  $L \sim S$ . در این صورت، نشان می‌دهیم که به ازای هر  $n$ ،  $Z_n(S) = 0$ . چون  $L \sim S$ ، بنابراین

$$Z(L) \cap L^2 \cong Z(S) \cap S^2$$

لذا، با توجه به گزاره ۲.۴،

$$Z_n(S) \cap S^2 = 0, \quad Z_n(S) \subseteq Z(S)$$

## فهرست منابع

- [1] P. Hall, The classification of prime-power groups, *J. Reine Angew. Math.* 182 (1940) 130-141.
- [2] N. S. Hekster, On the structure of  $n$ -isoclinism classes of groups, *J. Pure Appl. Algebra* 40 (1986) 63-85.
- [3] N. S. Hekster, Varieties of groups and isologisms, *J. Aust. Math. Soc. (Series A)* 46 (1989) 22-60.
- [4] M. Chakaneh, A. Kaheni, S. Kayvanfar, On  $c$ -capability and  $n$ -isoclinic families of a specific class of groups, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* (2019) 129:50.
- [5] Y. Taghavi, S. Kayvanfar, M. Chakaneh, On the converse of Baer's theorem for generalizations of groups with trivial Frattini subgroups, *Algebraic Structures and Their Applications* 6(1) (2019) 139-148.
- [6] K. Moneyhun, Isoclinisms in Lie algebras, *Algebras, Groups and Geometries* 11 (1994) 9–22.
- [7] A.R. Salemkar, H. Bigdely, V. Alamian, Some properties on isoclinism of Lie algebras and covers, *J. Algebra Appl.* 7(4) (2008) 507–516.
- [8] H. Arabyani, F. Saeedi, On dimensions of derived algebra and central factor of a Lie algebra, *Bull. Iranian Math. Soc.* 41(5) (2015) 1093-1102.
- [9] A.R. Salemkar, F. Mirzaei, Characterizing  $n$ -isoclinism classes of Lie algebras, *Comm. Algebra* 35 (2010) 3392-3403.
- [10] D.W. Barnes, Nilpotency of Lie algebras, *Math. Z.* 79 (1962) 237–238.

