

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و سوم، آذر و دی ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادله کوندو- موکرجی-ناسکار دوبعدی

کامیار حسینی<sup>۱\*</sup>، ماشاءاله متین فر<sup>۱</sup>، محمد علی میرزازاده<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه علوم مهندسی، دانشگاه گیلان، شرق گیلان، واجارگاه، گیلان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۲۲

### چکیده

معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی توصیف کننده انتشار دینامیک سولیتون در سیستم‌های ارتباطی فیبر نوری در مقاله حاضر مطالعه می‌شود. هدف موردنظر با به کارگیری یک تبدیل موج حرکتی برای کاهش معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به یک دامنه یک-بعدی و حل معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی حاصله با استفاده از روش‌های تابع نمایی و ضمنی ژاکوبی اجرایی می‌گردد. به‌عنوان یک موفقیت، سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی با تایید عملکرد فوق العاده روش‌های به کارگیری شده رسماً استخراج می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی، تبدیل موج حرکتی، روش‌های تابع نمایی و ضمنی ژاکوبی، سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر.

### ۱- مقدمه

استخراج سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی ناشی در اپتیک یک موضوع داغ و جذاب در مقالات امروزی است. در این خصوص، مقالات ارزنده بسیاری در نواحی‌ای از اپتیک غیرخطی ارائه گردیده‌اند که موضوع آن‌ها دربرگیرنده سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی می‌باشد. با توجه به اهمیت این موضوع، روش‌های موثر متفاوتی [۱-۲۷] برای به دست آوردن سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی پیشنهاد و استفاده گردیده‌اند. در این مقاله، معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی زیر [۱-۷]

$$i \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial y \partial x} + i \alpha_2 \psi(x, y, t) \left( \psi(x, y, t) \frac{\partial \psi^*(x, y, t)}{\partial x} - \psi^*(x, y, t) \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x} \right) = 0, \quad (1)$$

که توصیف کننده انتشار دینامیک سولیتون در سیستم‌های ارتباطی فیبر نوری است مطالعه می‌گردد. در معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی (۱)،  $\alpha_1$  ضریب جمله پراکندگی و  $\alpha_2$  ضریب جملات غیرخطی می‌باشند. برای آگاهی خوانندگان، معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی با استفاده از روش‌های مختلفی مطالعه گردیده است. در این خصوص، بیسواس و همکاران [۱]، با به کارگیری روش تقارن لی، سولیتون‌های نوری معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی را به دست آوردند. کودریاشف [۲] جواب عمومی معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی را با استفاده از توابع ضمنی ژاکوبی و وایراشتراس ارائه نمود. سولیتون‌های نوری معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به واسطه استفاده از روش تابع آزمایشی توسعه یافته توسط اکیسی و همکاران [۳] گزارش شدند. ییلدیریم [۴] با اتخاذ روش معادله آزمایشی،

سولیتون‌های منفرد، روشن، و تاریک معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی را فهرست نمود. ییلدیریم همچنین [۵] با استفاده از روش معادله ساده اصلاح شده، سولیتون‌های منفرد، روشن، و تاریک معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی را یافت نمود. سولیتون‌های منفرد، روشن، و تاریک معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی با به کارگیری روش‌های جایگزینی و سینوس-گردن به وسیله آلیو و همکاران [۶] ارائه شدند. ییلدیریم و میرزاده [۷] با اتخاذ روش‌های متفاوت، سولیتون‌های نوری معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی را به دست آوردند. لزوم تحقیقات بیشتر، نویسندگان این مقاله را تشویق به استفاده از روش‌های تابع نمایی و ضمنی ژاکوبی [۱۶-۲۷] جهت یافتن سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی نمود. نمای کلی مقاله حاضر به صورت زیر است: در بخش ۲، صورت کاهش یافته معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی در یک دامنه یک-بعدی به دست می‌آید. در بخش ۳، سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به کمک روش‌های تابع نمایی و ضمنی ژاکوبی تعیین می‌گردند. نتایج مطالعه حاضر در بخش آخر بازبینی می‌شوند.

### ۲- صورت کاهش یافته معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی

برای رسیدن به صورت کاهش یافته معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دو بعدی، در ابتدا یک تبدیل موج حرکتی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\psi(x, y, t) = U(\epsilon) e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y + \omega t + \zeta)}, \quad (2)$$

$$\epsilon = B_1 x + B_2 y - \rho t,$$

که  $\rho$  سرعت سولیتون و  $\omega$  فرکانس سولیتون می‌باشند.

بعد از جای‌گذاری تبدیل موج حرکتی (۲) در داخل

$$a_1 \alpha_1 b_1^2 \kappa_1 \kappa_2 + 2a_1^3 \alpha_2 \kappa_1 + \omega a_1 b_1^2 = 0.$$

با حل دستگاه بالا به کمک یک نرم افزار محاسباتی از قبیل میپل می‌یابیم

$$a_0 = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \ln(a) b_0,$$

$$a_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \ln(a) b_1,$$

$$\omega = -\frac{1}{2} \alpha_1 ((\ln(a))^2 B_1 B_2 + 2\kappa_1 \kappa_2).$$

در نهایت، سولیتون‌های نوری معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به صورت زیر نتیجه می‌شوند.

$$\psi_{1,2}(x, y, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \ln(a) \frac{\mp b_0 \pm b_1 a^{B_1 x + B_2 y + (B_1 \alpha_1 \kappa_2 + B_2 \alpha_1 \kappa_1) t}}{b_0 + b_1 a^{B_1 x + B_2 y + (B_1 \alpha_1 \kappa_2 + B_2 \alpha_1 \kappa_1) t}} e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y - \frac{1}{2} \alpha_1 ((\ln(a))^2 B_1 B_2 + 2\kappa_1 \kappa_2) t + \zeta)}.$$

خواص دینامیکی  $|\psi_1(x, y, t)|$  برای مقادیر انتخابی  $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = -1, b_1 = 1, b_0 = 1, \kappa_2 = 1, \kappa_1 = -1, B_2 = -1, B_1 = -1, \zeta = 0, a = 2.7$  و در شکل (۱) نشان داده شده است. از این شکل به روشنی پیدا است که  $|\psi_1(x, y, t)|$  برای مقادیر داده شده یک سولیتون نوری تاریک را نشان می‌دهد.

حال با توجه به قابلیت روش تابع نمایی، جواب معادله (۳) به صورت یک تابع کسری دیگر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$U(\epsilon) = \frac{a_0 + a_1 a^\epsilon + a_2 a^{2\epsilon}}{b_0 + b_1 a^\epsilon + b_2 a^{2\epsilon}}, \quad (5)$$

که ثابت‌های  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  مجهولاتی هستند که در ادامه یافت می‌شوند. با قراردادن تابع کسری (۵) در معادله کاهش یافته (۳) و برابر صفر قرار دادن هر یک از ضرایب، دستگاه معادلات جبری غیرخطی زیر نتیجه می‌شود.

$$a_0 \alpha_1 b_0^2 \kappa_1 \kappa_2 + 2a_0^3 \alpha_2 \kappa_1 + \omega a_0 b_0^2 = 0,$$

معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی (۱) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی، صورت کاهش یافته معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\alpha_1 B_1 B_2 \frac{d^2 U(\epsilon)}{d\epsilon^2} - (\alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 + \omega) U(\epsilon) - 2\alpha_2 \kappa_1 U^3(\epsilon) = 0, \quad (3)$$

$$\rho = -(B_1 \alpha_1 \kappa_2 + B_2 \alpha_1 \kappa_1) \text{ که}$$

### ۳- سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی

در این بخش، سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی با اتخاذ دو روش سیستماتیک به نام‌های روش تابع نمایی و روش تابع ضمنی ژاکوبی استخراج می‌گردند. میپل به‌عنوان یک ابزار ضروری برای انجام محاسبات مورد نیاز استفاده می‌شود.

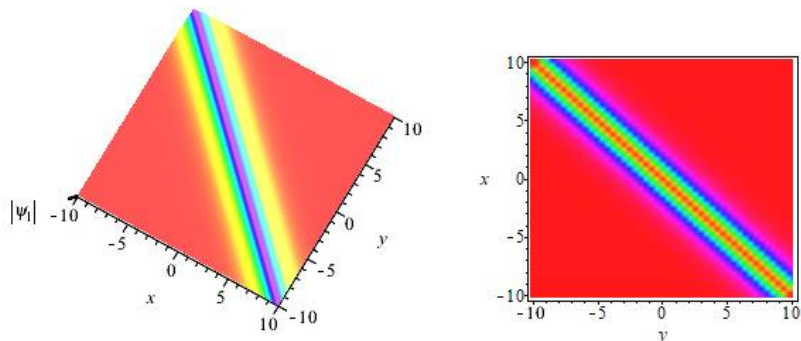
#### ۳-۱- روش تابع نمایی

در این روش جواب معادله (۳) به صورت یک تابع کسری به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$U(\epsilon) = \frac{a_0 + a_1 a^\epsilon}{b_0 + b_1 a^\epsilon}, \quad (4)$$

که مجهولات  $a_0, a_1, b_0, b_1$  در ادامه یافت می‌شوند. با جایگذاری تابع کسری (۴) در معادله کاهش یافته (۳) و برابر صفر قرار دادن هر یک از ضرایب، دستگاه معادلات جبری غیرخطی زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned} a_0 \alpha_1 b_0^2 \kappa_1 \kappa_2 + 2a_0^3 \alpha_2 \kappa_1 + \omega a_0 b_0^2 &= 0, \\ -(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_0 \alpha_1 b_0 b_1 + \\ (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_1 \alpha_1 b_0^2 - \\ 2a_0 \alpha_1 b_0 b_1 \kappa_1 \kappa_2 - a_1 \alpha_1 b_0^2 \kappa_1 \kappa_2 - \\ 6a_0^2 \alpha_1 \alpha_2 \kappa_1 - 2\omega a_0 b_0 b_1 - \omega a_1 b_0^2 &= 0, \\ (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_0 \alpha_1 b_1^2 - \\ (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_1 \alpha_1 b_0 b_1 - a_0 \alpha_1 b_1^2 \kappa_1 \kappa_2 - \\ 2a_1 \alpha_1 b_0 b_1 \kappa_1 \kappa_2 - 6a_0 a_1^2 \alpha_2 \kappa_1 - \\ \omega a_0 b_1^2 - 2\omega a_1 b_0 b_1 &= 0, \end{aligned}$$



شکل ۱. خواص دینامیکی  $|\psi_1(x, y, t)|$  برای مقادیر  $b_0 = 1, b_1 = 1, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, B_1 = -1, B_2 = -1$  و  $t = 0, a = 2.7, \zeta = 0, \kappa_2 = 1, \kappa_1 = -1$

با حل دستگاه جبری غیرخطی بالا، سولیتون‌های نوری معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\psi_{3,4}(x, y, t) = \frac{a_0 + a_1 a^\epsilon + a_2 a^{2\epsilon}}{b_0 + b_1 a^\epsilon + b_2 a^{2\epsilon}} e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y - \frac{1}{2} \alpha_1 ((\ln(a))^2 B_1 B_2 + 2\kappa_1 \kappa_2) t + \zeta)},$$

$$a_0 = \mp \frac{((\ln(a))^2 B_1 B_2 \alpha_1 b_1^2 - 4a_1^2 \alpha_2 \kappa_1) \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}}{8b_2 \ln(a) B_1 B_2 \alpha_1}$$

$$a_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \ln(a) b_2,$$

$$b_0 = \frac{(\ln(a))^2 B_1 B_2 \alpha_1 b_1^2 - 4a_1^2 \alpha_2 \kappa_1}{4b_2 (\ln(a))^2 B_1 B_2 \alpha_1},$$

$$\epsilon = B_1 x + B_2 y + (B_1 \alpha_1 \kappa_2 + B_2 \alpha_1 \kappa_1) t.$$

### ۳-۲- روش تابع ضمنی ژاکوبی

برای به دست آوردن سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دو بعدی، ابتدا جملات  $U''(\epsilon)$  و  $U^3(\epsilon)$  برای پیدا شدن عدد تعادل  $N = 1$  در نظر گرفته می‌شوند. با معین شدن عدد تعادل، جواب معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$U(\epsilon) = a_0 + a_1 \frac{J(\epsilon)}{1+J^2(\epsilon)} + a_2 \frac{1-J^2(\epsilon)}{1+J^2(\epsilon)}, \quad (6)$$

که  $a_0, a_1, a_2$  مجهولاتی برای پیدا شدن و تابع

$$\begin{aligned} & -(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_0 \alpha_1 b_0 b_1 + (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_1 \alpha_1 b_0^2 - \\ & 2a_0 \alpha_1 b_0 b_1 \kappa_1 \kappa_2 - a_1 \alpha_1 b_0^2 \kappa_1 \kappa_2 - 6a_0^2 \alpha_1 \alpha_2 \kappa_1 - 2\omega a_0 b_0 b_1 - \omega a_1 b_0^2 = 0, \\ & -4(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_0 \alpha_1 b_0 b_2 + (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_0 \alpha_1 b_1^2 - \\ & (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_1 \alpha_1 b_0 b_1 + 4(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_2 \alpha_1 b_0^2 - \\ & 2a_0 \alpha_1 b_0 b_2 \kappa_1 \kappa_2 - a_0 \alpha_1 b_1^2 \kappa_1 \kappa_2 - 2a_1 \alpha_1 b_0 b_1 \kappa_1 \kappa_2 - a_2 \alpha_1 b_0^2 \kappa_1 \kappa_2 - \\ & 6a_0^2 a_2 \alpha_2 \kappa_1 - 6a_0 a_1^2 \alpha_2 \kappa_1 - 2\omega a_0 b_0 b_2 - \omega a_0 b_1^2 - 2\omega a_1 b_0 b_1 - \omega a_2 b_0^2 = 0, \\ & 3(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_0 \alpha_1 b_1 b_2 - 6(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_1 \alpha_1 b_0 b_2 + \\ & 3(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_2 \alpha_1 b_0 b_1 - 2a_0 \alpha_1 b_1 b_2 \kappa_1 \kappa_2 - 2a_1 \alpha_1 b_0 b_2 \kappa_1 \kappa_2 - \\ & a_1 \alpha_1 b_1^2 \kappa_1 \kappa_2 - 2a_2 \alpha_1 b_0 b_1 \kappa_1 \kappa_2 - 12a_0 a_1 a_2 \alpha_2 \kappa_1 - 2a_1^3 \alpha_2 \kappa_1 - \\ & 2\omega a_0 b_1 b_2 - 2\omega a_1 b_0 b_2 - \omega a_1 b_1^2 - 2\omega a_2 b_0 b_1 = 0, \\ & 4(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_0 \alpha_1 b_2^2 - (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_1 \alpha_1 b_1 b_2 - \\ & 4(\ln(a))^2 B_1 B_2 a_2 \alpha_1 b_0 b_2 + (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_2 \alpha_1 b_1^2 - a_0 \alpha_1 b_2^2 \kappa_1 \kappa_2 - \\ & 2a_1 \alpha_1 b_1 b_2 \kappa_1 \kappa_2 - 2a_2 \alpha_1 b_0 b_2 \kappa_1 \kappa_2 - a_2 \alpha_1 b_1^2 \kappa_1 \kappa_2 - 6a_0 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 - \\ & 6a_1^2 a_2 \alpha_2 \kappa_1 - \omega a_0 b_2^2 - 2\omega a_1 b_1 b_2 - 2\omega a_2 b_0 b_2 - \omega a_2 b_1^2 = 0, \\ & (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_1 \alpha_1 b_2^2 - (\ln(a))^2 B_1 B_2 a_2 \alpha_1 b_1 b_2 - a_1 \alpha_1 b_2^2 \kappa_1 \kappa_2 - \\ & 2a_2 \alpha_1 b_1 b_2 \kappa_1 \kappa_2 - 6a_1 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 - \omega a_1 b_2^2 - 2\omega a_2 b_1 b_2 = 0, \\ & a_2 \alpha_1 b_2^2 \kappa_1 \kappa_2 + 2a_2^3 \alpha_2 \kappa_1 + \omega a_2 b_2^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\bullet a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \pm 2 \sqrt{-\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}},$$

$$\omega = \alpha_1 (4B_1 B_2 - \kappa_1 \kappa_2), \quad m = 1.$$

چون

$$J(\epsilon) = sn(\epsilon), \quad sn(\epsilon, 1) \rightarrow \tanh(\epsilon),$$

بنابراین سولیتون‌های نوری معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\psi_{1,2}(x, y, t) = \pm 4 \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \frac{\tanh(\epsilon)}{1 + \tanh^2(\epsilon)}$$

$$e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y - \alpha_1 (8B_1 B_2 + \kappa_1 \kappa_2)t + \zeta)},$$

و

$$\psi_{3,4}(x, y, t) = \pm 2 \sqrt{-\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1} \frac{1 - \tanh^2(\epsilon)}{1 + \tanh^2(\epsilon)}}$$

$$e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y + \alpha_1 (4B_1 B_2 - \kappa_1 \kappa_2)t + \zeta)},$$

که

$$\epsilon = B_1 x + B_2 y + (B_1 \alpha_1 \kappa_2 + B_2 \alpha_1 \kappa_1)t.$$

حالت ۲. وقتی  $D = 1 - m^2$ ,  $E = 2m^2 - 1$  و  $F = -m^2$  می‌یابیم.

$$a_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \mp$$

$$\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1 \sqrt{-\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}}, \quad \omega = \frac{1}{2} \alpha_1 (5B_1 B_2 -$$

$$2\kappa_1 \kappa_2), \quad m = \frac{1}{2}.$$

از آنجا که  $J(\epsilon) = cn(\epsilon)$  بنابراین جواب‌های ضمنی معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به شکل زیر حاصل می‌گردند.

$$\psi_{5,6}(x, y, t) =$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \mp \frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1 \sqrt{-\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}} \frac{1 - cn^2(\epsilon, \frac{1}{2})}{1 + cn^2(\epsilon, \frac{1}{2})}$$

$$e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y + \frac{1}{2} \alpha_1 (5B_1 B_2 - 2\kappa_1 \kappa_2)t + \zeta)},$$

که

$$\epsilon = B_1 x + B_2 y + (B_1 \alpha_1 \kappa_2 + B_2 \alpha_1 \kappa_1)t.$$

ضمنی ژاکوبی  $J(\epsilon)$  در معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی زیر صدق می‌نماید.

$$(J'(\epsilon))^2 = D + EJ^2(\epsilon) + FJ^4(\epsilon).$$

با جای‌گذاری سری متناهی (۶) در معادله کاهش یافته (۳) و برابر صفر قرار دادن هر یک از ضرایب، دستگاه معادلات جبری غیرخطی زیر حاصل می‌گردد.

$$-4DB_1 B_2 a_2 \alpha_1 - 2a_0^3 \alpha_2 \kappa_1 -$$

$$6a_0^2 a_2 \alpha_2 \kappa_1 - 6a_0 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 - 2a_2^3 \alpha_2 \kappa_1 -$$

$$a_0 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 - a_2 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 - \omega a_0 - \omega a_2 = 0,$$

$$-6DB_1 B_2 a_1 \alpha_1 + EB_1 B_2 a_1 \alpha_1 -$$

$$6a_0^2 a_1 \alpha_2 \kappa_1 - 12a_0 a_1 a_2 \alpha_2 \kappa_1 -$$

$$6a_1 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 - a_1 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 - \omega a_1 = 0,$$

$$12DB_1 B_2 a_2 \alpha_1 - 8EB_1 B_2 a_2 \alpha_1 -$$

$$6a_0^3 \alpha_2 \kappa_1 - 6a_0^2 a_2 \alpha_2 \kappa_1 - 6a_0 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 +$$

$$6a_0 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 - 6a_1^2 a_2 \alpha_2 \kappa_1 + 6a_2^3 \alpha_2 \kappa_1 -$$

$$3a_0 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 - a_2 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 - 3\omega a_0 -$$

$$\omega a_2 = 0,$$

$$2DB_1 B_2 a_1 \alpha_1 - 6EB_1 B_2 a_1 \alpha_1 +$$

$$2FB_1 B_2 a_1 \alpha_1 - 12a_0^2 a_1 \alpha_2 \kappa_1 -$$

$$2a_1^3 \alpha_2 \kappa_1 + 12a_1 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 - 2a_1 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 -$$

$$2\omega a_1 = 0,$$

$$8EB_1 B_2 a_2 \alpha_1 - 12FB_1 B_2 a_2 \alpha_1 -$$

$$6a_0^3 \alpha_2 \kappa_1 + 6a_0^2 a_2 \alpha_2 \kappa_1 - 6a_0 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 +$$

$$6a_0 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 + 6a_1^2 a_2 \alpha_2 \kappa_1 - 6a_2^3 \alpha_2 \kappa_1 -$$

$$3a_0 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 + a_2 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 - 3\omega a_0 +$$

$$\omega a_2 = 0,$$

$$EB_1 B_2 a_1 \alpha_1 - 6FB_1 B_2 a_1 \alpha_1 -$$

$$6a_0^2 a_1 \alpha_2 \kappa_1 + 12a_0 a_1 a_2 \alpha_2 \kappa_1 -$$

$$6a_1 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 - a_1 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 - \omega a_1 = 0,$$

$$4FB_1 B_2 a_2 \alpha_1 - 2a_0^3 \alpha_2 \kappa_1 + 6a_0^2 a_2 \alpha_2 \kappa_1 -$$

$$6a_0 a_2^2 \alpha_2 \kappa_1 + 2a_2^3 \alpha_2 \kappa_1 - a_0 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 +$$

$$a_2 \alpha_1 \kappa_1 \kappa_2 - \omega a_0 + \omega a_2 = 0.$$

با به کارگیری نرم افزار میپیل می‌یابیم:

حالت ۱. وقتی  $D = 1$ ,  $E = -(m^2 + 1)$  و  $F = m^2$  می‌یابیم.

$$\bullet a_0 = 0, \quad a_1 = \pm 4 \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}, \quad a_2 = 0,$$

$$\omega = -\alpha_1 (8B_1 B_2 + \kappa_1 \kappa_2), \quad m = 1,$$

$$e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y - \frac{1}{2}\alpha_1(5B_1 B_2 + 2\kappa_1 \kappa_2)t + \zeta)},$$

که

$$\epsilon = B_1 x + B_2 y + (B_1 \alpha_1 \kappa_2 + B_2 \alpha_1 \kappa_1)t.$$

قابل ذکر است که با روندی مشابه با آنچه در حالت‌های قبل انجام شد می‌توان جواب‌های دقیق متعدد دیگری برای معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی فهرست نمود.

شکل ۲ خواص دینامیکی  $|\psi_3(x, y, t)|$  را برای مقادیر مفروض  $B_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $B_2 = 0.75$ ,  $\kappa_2 = -1$ ,  $\kappa_1 = 1$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\omega = 1$  و  $t = 0$  نشان می‌دهد. از این شکل به روشنی پیدا است که  $|\psi_3(x, y, t)|$  برای مقادیر داده شده یک سولیتون نوری روشن را نشان می‌دهد.

### نتیجه‌گیری

یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی مشهور در اپتیک موسوم به معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی که توصیف‌کننده انتشار دینامیک سولیتون در سیستم‌های ارتباطی فیبر نوری می‌باشد در این مقاله با موفقیت مطالعه شد. برای این کار، ابتدا با استفاده از یک تبدیل موج حرکتی، معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی کاهش و سپس معادله حاصله به کمک روش‌های تابع نمایی و ضمنی ژاکوبی حل گردید. به‌عنوان یک نتیجه، سولیتون‌های نوری و جواب‌های دیگر معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی با تایید عملکرد فوق‌العاده روش‌های به کارگیری شده رسماً گزارش شدند. باور می‌شود که تحقیق حاضر گامی اساسی در ارائه نتایج جدید در خصوص معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی برداشته است.

حالت ۳. وقتی  $D = m^2$ ,  $E = -(m^2 + 1)$ , و  $F = 1$  می‌یابیم.

$$\bullet a_0 = 0, \quad a_1 = \pm 4 \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}, \quad a_2 = 0,$$

$$\bullet \omega = -\alpha_1(8B_1 B_2 + \kappa_1 \kappa_2), \quad m = 1,$$

$$\bullet a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \pm 2 \sqrt{-\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}},$$

$$\omega = \alpha_1(4B_1 B_2 - \kappa_1 \kappa_2), \quad m = 1.$$

چون

$$J(\epsilon) = ns(\epsilon), \quad ns(\epsilon, 1) \rightarrow \coth(\epsilon),$$

بنابراین سولیتون‌های نوری معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\psi_{7,8}(x, y, t)$$

$$= \pm 4 \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \frac{\coth(\epsilon)}{1 + \coth^2(\epsilon)}$$

$$e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y - \alpha_1(8B_1 B_2 + \kappa_1 \kappa_2)t + \zeta)},$$

9

$$\psi_{9,10}(x, y, t) =$$

$$\pm 2 \sqrt{-\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \frac{1 - \coth^2(\epsilon)}{1 + \coth^2(\epsilon)}$$

$$e^{i(-\kappa_1 x - \kappa_2 y + \alpha_1(4B_1 B_2 - \kappa_1 \kappa_2)t + \zeta)},$$

که

$$\epsilon = B_1 x + B_2 y + (B_1 \alpha_1 \kappa_2 + B_2 \alpha_1 \kappa_1)t.$$

حالت ۴. وقتی  $D = -m^2$ ,  $E = 2m^2 - 1$ , و  $F = 1 - m^2$  می‌یابیم.

$$a_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \pm$$

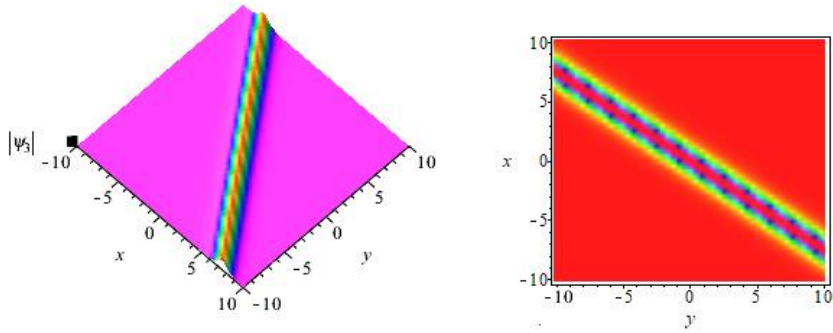
$$\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1 \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}}, \quad \omega = -\frac{1}{2} \alpha_1(5B_1 B_2 +$$

$$2\kappa_1 \kappa_2), \quad m = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

از آنجا که  $J(\epsilon) = nc(\epsilon)$ ، بنابراین جواب‌های ضمنی معادله کوندو-موکرجی-ناسکار دوبعدی به شکل زیر حاصل می‌گردند.

$$\psi_{11,12}(x, y, t)$$

$$= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}} \pm \frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1 \sqrt{\frac{B_1 B_2 \alpha_1}{\alpha_2 \kappa_1}}} \frac{1 - nc^2\left(\epsilon, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 + nc^2\left(\epsilon, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$



شکل ۲. خواص دینامیکی  $|\psi_3(x, y, t)|$  برای مقادیر مفروض  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, B_1 = 1, B_2 = 0.75, \kappa_1 = 1, \kappa_2 = -1, \zeta = 0, \omega = 1$  و  $t = 0$ .

Kerr law nonlinearity by Jacobi's elliptic ds function expansion, *Optik* 192: 162954 (2019)

[9] A. Biswas, A. Sonmezoglu, M. Ekici, A.S. Alshomrani, Highly dispersive singular optical solitons having Kerr law nonlinearity by Jacobi's elliptic cs function expansion, *Optik* 192: 162931 (2019)

[10] A. Das, A. Biswas, M. Ekici, Q. Zhou, A.S. Alshomrani, M.R. Belic, Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using  $F$ -expansion, *Chinese Journal of Physics* 61: 255–261 (2019)

[11] A. Biswas, M. Ekici, A. Sonmezoglu, M.R. Belic, Highly dispersive optical solitons with quadratic-cubic law by exp-function, *Optik* 186: 431–435 (2019)

[12] A. Biswas, M. Ekici, A. Sonmezoglu, M.R. Belic, Optical solitons in birefringent fibers having anti-cubic nonlinearity with exp-function, *Optik* 186: 363–368 (2019)

[13] R.W. Kohl, A. Biswas, M. Ekici, Q. Zhou, S. Khan, A.S. Alshomrani, M.R. Belic, Highly dispersive optical soliton perturbation with Kerr law by semi-inverse variational principle, *Optik* 199: 163226 (2019)

[14] A. Biswas, S. Arshed, Application of semi-inverse variational principle to cubic-quartic optical solitons with kerr and power law nonlinearity, *Optik* 172: 847–850 (2018)

[15] A. Biswas, Y. Yıldırım, E. Yaşar, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Belic, Sub pico-second pulses in mono-mode optical fibers with Kaup–Newell equation by a couple of integration schemes, *Optik* 167: 121–128 (2018)

## فهرست منابع

[1] A. Biswas, J. Vega-Guzman, A. Bansal, A.H. Kara, A.K. Alzahrani, Q. Zhou, M.R. Belic, Optical dromions, domain walls and conservation laws with Kundu–Mukherjee–Naskar equation via traveling waves and Lie symmetry, *Results in Physics* 16: 102850 (2020)

[2] N.A. Kudryashov, General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar model, *Optik* 186: 22–27 (2019)

[3] M. Ekici, A. Sonmezoglu, A. Biswas, M.R. Belic, Optical solitons in (2+1)-Dimensions with Kundu–Mukherjee–Naskar equation by extended trial function scheme, *Chinese Journal of Physics* 57: 72–77 (2019)

[4] Y. Yıldırım, Optical solitons to Kundu–Mukherjee–Naskar model with trial equation approach, *Optik* 183: 1061–1065 (2019)

[5] Y. Yıldırım, Optical solitons to Kundu–Mukherjee–Naskar model with modified simple equation approach, *Optik* 184: 247–252 (2019)

[6] A.I. Aliyu, Y. Li, D. Baleanu, Single and combined optical solitons, and conservation laws in (2+1)-dimensions with Kundu–Mukherjee–Naskar equation, *Chinese Journal of Physics* 63: 410–418 (2020)

[7] Y. Yıldırım, M. Mirzazadeh, Optical pulses with Kundu–Mukherjee–Naskar model in fiber communication systems, *Chinese Journal of Physics* 64: 183–193 (2019)

[8] A. Biswas, A. Sonmezoglu, M. Ekici, A.S. Alshomrani, M.R. Belic, Highly dispersive singular optical solitons with



functions of MKdV equation and BBM equation, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 28: 409–415 (2012)

[25] E.M.E. Zayed, R.M.A. Shohib, A. Biswas, Y. Yıldırım, F. Mallawi, M.R. Belic, Chirped and chirp-free solitons in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity having parabolic law nonlinearity by Jacobi's elliptic function, *Results in Physics* 15: 102784 (2019)

[26] E.M.E. Zayed, M.E.M. Alngar, Optical solitons in birefringent fibers with Biswas–Arshed model by generalized Jacobi elliptic function expansion method, *Optik* 203: 163922 (2020)

[27] M.M.A. El-Sheikh, A.R. Seadawy, H.M. Ahmed, A.H. Arnous, W.B. Rabie, Dispersive and propagation of shallow water waves as a higher order nonlinear Boussinesq-like dynamical wave equations, *Physica A* 537: 122662 (2020)

[16] J.H. He, X.H. Wu, Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons and Fractals* 30: 700–708 (2006)

[17] A.T. Ali, E.R. Hassan, General  $\exp_a$  function method for nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation* 217: 451–459 (2010)

[18] K. Hosseini, R. Ansari, F. Samadani, A. Zabihi, A. Shafaroody, M. Mirzazadeh, High-order dispersive cubic-quintic Schrödinger equation and its exact solutions, *Acta Physica Polonica A* 136: 203–207 (2019)

[19] K. Hosseini, A. Zabihi, F. Samadani, R. Ansari, New explicit exact solutions of the unstable nonlinear Schrödinger's equation using the  $\exp_a$  and hyperbolic function methods, *Optical and Quantum Electronics* 50: 82 (2018)

[20] K. Hosseini, M.S. Osman, M. Mirzazadeh, F. Rabiei, Investigation of different wave structures to the generalized third-order nonlinear Schrödinger equation, *Optik* 206: 164259 (2020)

[21] K. Hosseini, Z. Ayati, R. Ansari, New exact solution of the Tzitzéica type equations in nonlinear optics using the  $\exp_a$  function method, *Journal of Modern Optics* 65: 847–851 (2018)

[22] K. Hosseini, M. Mirzazadeh, Q. Zhou, Y. Liu, M. Moradi, Analytic study on chirped optical solitons in nonlinear metamaterials with higher order effects, *Laser Physics* 29: 095402 (2019)

[23] K. Hosseini, M. Mirzazadeh, M. Ilie, S. Radmehr, Dynamics of optical solitons in the perturbed Gerdjikov–Ivanov equation, *Optik* 206: 164350 (2020)

[24] H.C. Ma, Z.P. Zhang, A.P. Deng, A new periodic solution to Jacobi elliptic

